A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Az aritmetikai vagy Pascal-háromszög néhány elemi tulajdonsága

(Holló-Szabó Ferenc)

Lánctörtek és alkalmazásaik

(Dr. Urbán János)

A matematikai feladatok és megoldások konvenciói

(Kántor Sándor)

Pont körre vonatkozó hatványa

(Kiss Sándor)

VII. ÉVFOLYAM 1999 1-2

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelő szerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 880 Ft.
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Szegedi Kossuth Nyomdában
Felelős vezető: Gera Imre

TARTALOM

Bakos Tibor (1909 – 1998)

Az aritmetikai vagy Pascal-háromszög néhány elemi tulajdonsága
Holló-Szabó Ferenc doktorandusz, BME, Budapest

Egy népszerű játék matematikája
Kosztolányi József egyetemi tanársegéd, JATE, Szeged

Lánctörtek és alkalmazásaik
Dr. Urbán János tanár, Budapest

A talpponti háromszög paradigmája
Benkő József egyetemi tanár, Pécs –
Szabó K. Ágnes tanár, Budapest

A matematikai feladatok és megoldások konvenciói
Kántor Sándor egyetemi docens, Debrecen

Pont körre vonatkozó hatványa
Kiss Sándor tanár, Szatmárnémeti

Hírek versenyekről

Felvételi feladatok 8. osztályosoknak

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Bakos Tibor (1909 – 1998)

Nagy veszteség érte a matematika tanítását, 1998. december 12-én elhunyt Bakos Tibor tanár úr. 90 év tapasztalatával, a tanügy igaz szolgálatával igyekezett segíteni mindazoknak, akik tanácsot kértek tőle. Szerény ember volt a szó igazi értelmében, aki élete példájával tanította diákok és tanárok generációit.

1909 június 8-án született Szegeden. Szombathelyen érettségizett, majd a Pázmány Péter Tudományegyetem matematika-fizika szakán folytatta tanulmányait. Tehetsége ekkorra már kibontakozott, hiszen a budapesti Eötvös Collégium tagja lett, s ezzel egy időben első díjat nyert matematikából és fizikából is az Eötvös-, illetve a Károly Ireneus középiskolai tanulmányi versenyeken. Egész fiatal korától kezdve figyelemmel kísérte a Középiskolai Matematikai Lapokat (KÖMAL). Már a két világháború között a Faragó Andor-féle lapokban is rendszeresen jelentek meg kitűzött feladványai.

Mint kezdő tanár Sátoraljaújhely, Pécs és Szombathely után visszakerült szülővárosába. Itt párhuzamosan tanított a Szegedi Pedagógiai Főiskolán és a Baross Gábor Gimnáziumban. A II. világháború alatt a zombori gimnázium igazgatóhelyettese volt, majd – miután hadifogságba esett, s onnan szerencsésen megmenekült – visszatért Szegedre. 1950-ben adjunktusi kinevezést kapott a Bolyai János Matematikai Intézetbe, ahol Kalmár László professzorral dolgozhatott együtt.

Talán nem véletlen, hogy a KÖMAL éppen Szegeden éledt újra a háborús évek után. Kezdetben a „Szegedi ívek" néven ismert stencilezett lapok formájában, majd ennek folytatásaként 1947 novemberétől indult útjára a KÖMAL új sorozata. Már az első füzetben több, általa kitűzött feladatot találunk.

Sok más folyóiratban is jelentek meg cikkei, feladatai. Egyik szerzője volt a matematikai osztályok számára írt III. osztályos tankönyvnek. Számos országos matematikaverseny lebonyolításában vállalt részt, versenybizottsági tag volt pl. az Arany Dániel, OKTV, Kürschák József versenyeken. Mindvégig igen aktív tagja volt a Bolyai János Matematikai Társulatnak.

Visszatérve a KÖMAL-lal való kapcsolatához: 1958 szeptemberétől Bakos Tibor lett a folyóirat felelős szerkesztője. Egészen nyugdíjazásáig, 1974 szeptemberéig látja el ezt a teljes embert kívánó feladatot. Ezután is aktív szerkesztőbizottsági tag maradt egészen haláláig. Több mint 40 évig vett részt a lap szerkesztésében, s ezzel ő lett a KÖMAL 100 évének egyik legjelentősebb alakja.

A „KÖMAL 100 CD" készítésekor értékes segítséget kaptunk tőle. Rendelkezésünkre bocsátotta a sok-sok éve féltve őrzött Szegedi Ívek teljes anyagát.

Saját elmondása szerint az egyik kedvenc foglalatossága már hadifogsága idején is a bűvös négyzetek tanulmányozása volt. Ebben a témában hatalmas ismeretanyagot halmozott fel, melyet rendszerezett és bőségesen kiegészített. Ebből ad ízelítőt utolsó könyve, melynek címe „Ki tud többet a bűvös négyzetekről?".

Holló-Szabó Ferenc

Holló-Szabó Ferenc

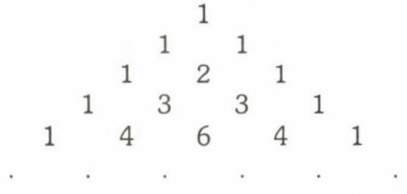
Az aritmetikai vagy Pascal-háromszög néhány elemi tulajdonsága

Bakos Tibor emlékének ajánlva

Blaise Pascal (1623 – 1662) „Traité du triangle arithmétique" című művének köszönhetően vált ismertté az első két ábrán szemléltetett nevezetes számelrendezés, amelyre ő aritmetikai-háromszögként hivatkozik. Ahogyan Pólya György fogalmaz „Pascal érdeme ebben a tárgykörben bőven elegendő annak megokolására, hogy az ő nevét használjuk.". A teljesség kedvéért meg kell említenünk, hogy Hiasszedin arab matematikus és Omar Khajjám a mai Türkisztán területén élt nagy perzsa költő is ismerte az aritmetikai háromszöget. Továbbá Csu Si-csie kínai matematikus is közre adta azt 1303-ban, és behatóan foglalkozott vele a neves olasz matematikus, Tartaglia (1500 – 1557) is.

Az aritmetikai háromszöggel kapcsolatban mára már olyan hatalmas ismeretanyag gyűlt össze, hogy mi itt ennek csak egy rövid vázlatát adhatjuk. A továbbiakban a 2. ábrán bemutatott sor oszlopos vagy táblázatszerű elrendezést vesszük alapul. Felvázoljuk a táblázat legismertebb értelmezési lehetőségeit, és főképpen azokat a tulajdonságait tárgyaljuk, amelyek a táblázatban való geometriai manipulációval hozhatók kapcsolatba (szimmetria, sorösszeg, átlóösszeg stb...).

Az értelmezés miléntjétől függetlenül a továbbiakban a táblázat n. sorának k. elemére a táblázaton belüli koordinátáival hivatkozhatunk, jelen esetben (n, k).



1.ábra
A Pascal-háromszög

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
.	.	.	.	.	.

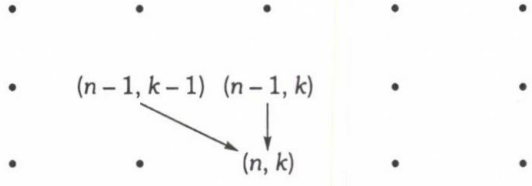
2.ábra
A Pascal-háromszög táblázatos elrendezése

1. Aritmetikai megközelítés

Induljunk ki egy darab 1-esből. Legyen ez a 0. sor 0. eleme. A táblázat többi elemét pedig lépésről lépésre, két, az aktuális elem fölött lévő elem összegeként kapjuk meg. Tehát legyen az n. sor k. eleme az $(n-1)$. sor $(k-1)$., illetve k. elemének összege.

Ha a szintenkénti építkezés közben valamelyik pozíciót a kiinduló egyes ily módon nem határozza meg, akkor a táblázat ezen elemeit 0-nak tekintjük. (De szokásos módon csak a 0-tól különböző elemeket fogjuk feltüntetni.) Ez az aritmetikai építkezés.

A 0. oszlopban a konstans 1 sorozatot találjuk, az 1.-ben pedig a természetes számok sorozatát. Továbbhaladva az oszlopok egyre bonyolultabb szerkezetűek lesznek. Látható,



3. ábra
Az elemek származtatása

hogy a $(k-1)$. oszlopot a k. oszlop egymást követő elemeinek különbségei alkotják. Az 1. oszlopban a természetes számok alkotta számtani sorozat ún. differencia-sorozata tehát a 0. oszlop konstans 1 sorozata, míg a 2. oszlopban egy olyan másodrendű számtani sorozatnak kell lennie, amelynek éppen ez a differencia-sorozata. Tehát a Pascal-háromszög k. oszlopában egy k-adrendű számtani sorozatot találunk. A főátlóval párhuzamos egyenesek mentén elhelyezkedő sorozatokkal kapcsolatban hasonló állítások fogalmazhatók meg.

Az előbbi megjegyzést és a táblázat fenti értelmezésében rejlő belső szimmetriából következő sorszimmetriát az 1. ábra teszi nyilvánvalóvá.

2. Kombinatorikai megközelítés

Legyen a táblázat n. sorának k. eleme az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma. Az elemeket most – az 1. megközelítéssel szemben – közvetlen módon adjuk meg, bár ez a megadási mód is igen egyszerűnek tűnik.

3. Megközelítés a binomiális kifejezések segítségével

A bevezetőben említett Omar Khajjám (1044? – 1123) valószínűleg önállóan fedezte fel pozitív egész kitevőkre a binomiális tételt. Figyeljük meg az $(a+b)^n$ kifejtett alakját, amikor a kitevő végigfut a természetes számok halmazán (4. ábra)!

Az $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = (a+b)^n \cdot a + (a+b)^n \cdot b$ összefüggés segítségével készítette el Csu Si-csie az 5. ábrán látható táblázatát, melyet 1303-ban közölt.

$$
\begin{aligned}
(a+b) &= \mathbf{1}a + \mathbf{1}b \\
(a+b)^2 &= \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2 \\
(a+b)^3 &= \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

4. ábra
A kéttagú kifejezések kifejtett alakja

1 1
1 2 1
1 3 3 1
. . . .

5. ábra
Csu Si-csie táblázata

Legyen a háromszög n. sorának k. eleme az $(a+b)^n$ binom kifejezés n. hatványának rendezett kifejtésében a b^k-t, azaz a második tag k. hatványát tartalmazó tag együtthatója. Rövidebben, legyen a táblázat n. sora az $(a+b)^n$ rendezett kifejtésében szereplő együtthatók sorozata. Állapodjunk meg abban, hogy a 0. Sor 1 db 1-esből áll.

4. Algebrai megközelítés

Legyen az n-sor k. eleme $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ (n alatt a k).

A fogalom általánosítása szempontjából előnyös $(n-k)!$-sal egyszerűsíteni, és ekkor az $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}$ alakhoz jutunk. (Ahol $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ (n faktoriális), azaz n-ig a pozitív egészek szorzata, definíció szerint legyen a $0! = 1! = 1$.)

Az $\binom{n}{k}$ jelölés Leonhard Euler hátrahagyott írásaiban lelhető fel először (R. Boltzer, Elemente I.,VII. Aufl. (1885) 130.o.).

A 3. és 4. megközelítésekből látszik, hogy miért szokás az $\binom{n}{k}$ kifejezéseket binomiális együtthatókként emlegetni.

5. Megközelítés (Urna modell)

Adott n darab urna, mindegyikben ott találjuk a 0 és az 1 számot. Húzzuk ki mindegyik urnából pontosan az egyik számot, és vegyük a kihúzott n db szám összegét. Az n. sor k. pozíciójában azt jegyezzük fel, hogy hányféleképpen kaphatjuk meg ily módon összegként éppen a k számot.

Kérdés tehát az, hogy hányféleképpen húzhatunk pontosan k-szor 1-est.

6. Megközelítés (Város)

Kitérők nélkül, (azaz folyton lefelé haladva) szeretnénk egy városka utcáin eljutni egy adott kereszteződésből egy kiválasztott másikba, ha

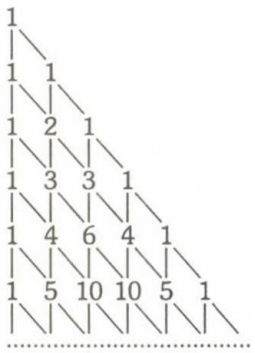
a városka utcáit a 6. ábrának megfelelően egy paralelogrammaráccsal szemléltethetjük. A kereszteződésekbe azt írjuk, hogy hányféleképpen juthatunk el oda a kiinduló pontból.

Most a felsorolást abba kell hagynunk, pedig további megközelítések is lehetségesek, sőt az utolsó két megközelítést visszavezethetjük a 2-ra.

(5) $\Rightarrow$ (2) Hiszen az urnamodellben az egyes urnákban levő 0 és 1 megfelelhet annak, hogy a részhalmaz készítésekor az egyes elemeket választjuk-e vagy sem.

(6) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (2) Ha kitérők nélkül akarunk eljutni egy adott kereszteződésbe, akkor könnyen látható, hogy minden lehetséges út ugyanolyan hosszú, azaz ugyanannyi kereszteződést érint. Továbbá a feltételek miatt minden kereszteződésből csak két irányba haladhatunk tovább, jelölhetjük ezeket 0-val és 1-gyel. Legyen minden kereszteződésben egy urna és benne a 0, 1 számok. Azt pedig, hogy merre haladunk úgy döntsük el, hogy húzunk az urnából egy számot, ha 0-t húztunk, menjünk délre, ha 1-et, délkeletre. Ahhoz, hogy a kívánt kereszteződésbe jussunk, mindig ugyanannyiszor kellett 0-t, illetve 1-et húznunk. Eljutottunk hát az urnamodellhez, amelyet az előbb azonosítottunk a kombinatorikus megközelítéssel.

Ha ugyanazt a kérdést többirányból is megközelíthetjük, akkor nagyobb az esélyünk a felmerülő probléma megoldására. Mindenki kiválaszthatja a saját gondolkozásának, tudásszintjének, illetve érdeklődésének megfelelő megközelítési irányt. (Fontos megjegyezni, hogy gyakran tehetünk a téma egyik fajta tárgyalása közben olyan észrevételeket, amelyeket valamelyik másik megközelítésnek megfelelően átfogalmazva tudunk munkánk során igazán jól használni.)



6. ábra
A város úthálózata

A lehetséges megközelítési módok ekvivalenciájára mi itt most nem térhetünk ki, de ezt a szakirodalom amúgy is bőségesen tárgyalja.

A továbbiakban a Pascal-háromszöggel, mint számtáblázattal kapcsolatban felmerülő kérdéseket fogunk tisztázni az első négy megközelítési mód mindegyikében. (A római számokkal jelöltük a problémákat, az arab számokkal pedig az egyes megközelítési módokra hivatkoztunk.)

I. Igazoljuk, hogy a táblázat *bármely eleme a felette lévő két elem összegével* egyenlő! Jelölésekkel: $(n, k) = (n-1, k) + (n-1, k-1)$.

1. Éppen ez az aritmetikai megközelítés lényege. A felsoroltak között ez az egyetlen, amely rekurzív.
2. Amikor az n elemű halmaz egyik elemét kitüntetjük és a k elemű részhalmazokat vizsgáljuk, két eset lehetséges: a kitüntetett elem vagy eleme az aktuális részhalmaznak, vagy nem. Ennek megfelelően a maradék $(n-1)$ darab elem közül még $(k-1)$ ill. k darabot kell kiválasztanunk, ami $(n-1, k-1)$, illetve $(n-1, k)$-féleképpen lehetséges. Ezek összege adja az összes lehetőségek számát.
3. $(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot a + (a+b)^{n-1} \cdot b$ így a bal oldalon az $a^{n-k}b^k$-os tag együtthatója nyilván az $(a+b)^{n-1}$ kifejtésében szereplő két szomszédos tag, azaz az $a^{n-k-1}b^k$ és az $a^{n-k}b^{k-1}$ együtthatóinak összegével kell hogy megegyezzen.
4. A binomiális együtthatók algebrai alakját használva azt kell belátni, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, ami egyenértékű a következő azonossággal: $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}$.

   Hozzuk a jobb oldalt közös nevezőre, s máris igazoltuk az azonosságot.

II. Igazoljuk a *Pascal-háromszög sorainak szimmetriáját!*

1. Mint már említettük a Pascal-háromszög sorainak szimmetriája az 1. ábrán látható háromszögszerű elrendezésből nyilvánvaló.

2. Amikor az n elemű halmaznak egy k elemű részhalmazát meghatározom, egyértelműen adódik az ő komplementer halmaza is. Csupán nézőpont kérdése tehát, hogy éppen a k vagy az $(n-k)$ elemszámú részhalmaz a kiválasztott. (Így a k illetve az $(n-k)$ elemszámú részhalmazok között egy bijektív megfeleltetés születik.) Nyilvánvaló tehát, hogy számuk megegyezik.

3. Mivel az $(a+b)^n$ binom kifejezésben a tagok szerepe szimmetrikus, azaz a-nak és b-nek sincs kitüntetett szerepe. Másként, ha az a-t és a b-t átnevezem, nyilván ugyanazt az összefüggést kell kapnom az összeadás kommutatív volta miatt, tehát az ekkor egymásnak megfelelő $a^{n-k}b^k$ és a^kb^{n-k} tagok együtthatói meg kell hogy egyezzenek.

4. Ha az $\binom{n}{k}$ algebrai kifejezésben a k-t és az $(n-k)$-t felcseréljük, akkor visszakapjuk az $\binom{n}{k}$-t, vagyis $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} =$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{n-k}.$$

III. Mennyi a *Pascal-háromszög sorainak összege?*

Az első néhány sor vizsgálata után megfogalmazható az a meglepő állítás, hogy az n. sor összege éppen az n. kettőhatvány.

1. Teljes indukciószerűen gondolkodva, mint láttuk az első néhány sorra igaz az állítás. S ha feltesszük, hogy az n. sor összege 2^n, akkor az öröklődés belátásához elég arra hivatkozni, hogy a következő sorban minden elemet pontosan két helyen használtunk fel összeadandóként, így a teljes összeg is kétszereződik. Az állítás igazsága tulajdonképpen a disztributivitáson múlik.

$$\begin{aligned} 1 &\leftarrow 1 \\ 2 &\leftarrow 1+1 \\ 4 &\leftarrow 1+2+1 \\ 8 &\leftarrow 1+3+3+1 \\ 16 &\leftarrow 1+4+6+4+1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

7. ábra
Az n. sor összege 2^n

2. Az n. sorban rendre az n elemű halmaz 0, 1, 2, ..., n elemű részhalmazainak számát találjuk. Ekkor minden részhalmazt pontosan egyszer vettünk figyelembe. Másrészt, ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy n elemű halmaznak hány részhalmaza van összesen, akkor az egyes részhalmazok készítésekor elemről elemre döntenünk kell, hogy az tartalmazza-e a vizsgált elemet vagy sem. Egymástól függetlenül kell döntenünk mindegyik elem esetében, így a lehetőségek száma: $2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

3. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}(n,k)\cdot a^{n-k}b^k$ Vegyük észre, hogyha a „szummában" a és b hatványai nem szerepelnének, akkor a sorösszeget jelentené.

Legyen $a = b = 1$. Ekkor az összefüggés, mely minden a, b valós értékpárra igaz, éppen a kívánt $(a+b)^n = (1+1)^n = 2^n =$

$= \sum_{k=0}^{n}(n,k)$ összefüggésbe megy át.

IV. Vegyük a *sorösszeget váltakozó előjellel!*

1. A páratlan sorszámú sorokra a sorszimmetria miatt az állítás nyilvánvaló.

A 0. sortól eltekintve minden sor váltakozó előjelű összege 0 lesz. Az 1., 2., 3., 4. sorokra könnyű ellenőrizni az állítást (8. ábra). Az öröklődéshez elég azt meggondolni, hogy az n sor minden elemét a következő sorban két olyan elemben használtuk fel összeadandókét, melyeknek ellentétes az előjele. Így ha vesszük a pozitív és negatív előjelű elemek összegét külön-külön, ugyanakkora abszolút-értékű mennyiségeket kapunk, melyek összege nyilván 0.

$0 = 1$
$0 = 1 - 1$
$0 = 1 - 2 + 1$
$0 = 1 - 3 + 3 - 1$
$0 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1$
.....

8. ábra
Sorok váltakozó előjelű összege

2. Most azt a nevezetes állítást kell belátnunk, hogy minden nem üres halmaznak ugyanannyi páros és páratlan elemszámú részhalmaza van.
Legyen az $n \geq 1$ elemű halmaz egyik eleme kitüntetett, s ha egy részhalmaz őt tartalmazza, akkor hagyjuk el belőle, ha nem, akkor pedig ragasszuk hozzá, hogy eggyel több eleme legyen. Ezzel az eljárással minden részhalmazt visszakaptunk pontosan egyszer. Ugyanakkor a részhalmazok elemszámának paritása minden esetben megváltozott. Ez csak úgy lehetséges, ha a két típushoz ugyanannyi részhalmaz tartozott.

3. A III. részben mondottak figyelembevételével az állítás nyilvánvaló.
Pl. az $a = 1$, $b = -1$ választás mellett ugyanis $(1 - 1)^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (n, k)$.

V. Nagyobb ügyesség szükséges annak észrevételéhez, hogy az *n. sor négyzetösszege éppen a (2n). sor n. eleme.*

1. A binomiális együtthatókkal kifejezve ez azt jelenti, hogy

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Vegyünk egy $2n$ elemű halmazt, és rögzítsünk egy n elemű részhalmazát, amelynek elemeit kitüntetjük. Amikor az azonosság jobb oldalának megfelelően azt vizsgáljuk, hogy a $2n$ elemű halmaznak hányféle n elemű részhalmaza van, akkor az n elemű halmazokat aszerint kell osztályoznunk, hogy a vizsgált részhalmaznak hány kitüntetett eleme van.
Általánosságban a k darab kitüntetett elemet $\binom{n}{k}$, az $(n - k)$ nem kitüntetett elemet pedig $\binom{n}{n-k}$ féleképpen adhatjuk meg.
Mivel ezek megválasztása egymástól függetlenül történt, ezért a lehetőségek egymással szabadon párosíthatóak, vagyis $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$-féle olyan n elemű halmaza van a $2n$ elemű alaphalmaznak, amely az n darab kitüntetett elemből éppen k darabot tartalmaz. De a II-ben tárgyaltak miatt a szorzat tényezői megegyeznek, vagyis $\binom{n}{k}^2$ írható, és ha az összes lehetséges k-t figyelembe vesszük, éppen az azonosság bal oldalához jutunk.

3. Tekintsük az $(a + b)^n(a + b)^n = (a + b)^{2n}$ azonosságot!
A rendezett felbontások segítségével mindkét oldalon az $a^n b^n$ együtthatóját vizsgálva már nyilvánvalóan adódik az állítás (fel kell most is használnunk a szimmetriát).

VI. A 9. ábrának megfelelően a *mellékátlóval párhuzamos egyenesek mentén kapható összegeket* tanulmányozva egy igen híres-nevezetes sorozathoz, a *Fibonacci-sorozathoz* jutunk.

A Fibonacci-sorozattal találkozhatunk pl. egyes populációs, filotaxissal és aranymetszéssel kapcsolatos problémáknál. Ez az egyik legismertebb rekurzív sorozat, melynek definíciója: $F_0 = 1, F_1 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

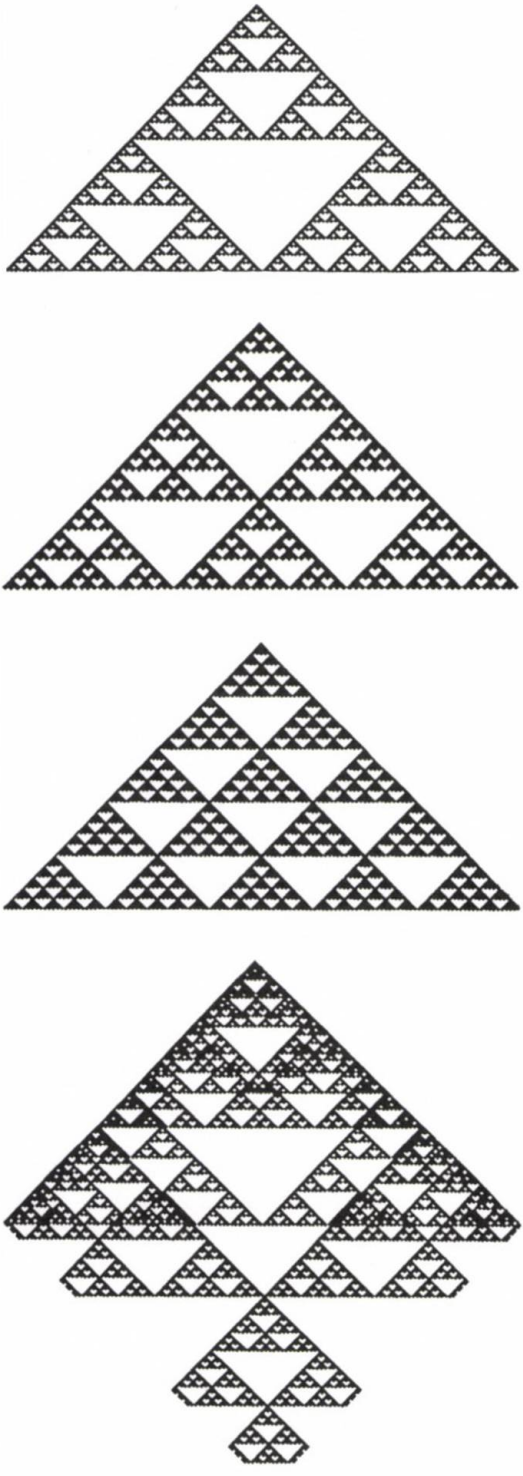
1. Rekurzív jellege miatt az aritmetikai megközelítéssel érdemes bizonyítanunk a Fibonacci-sorozat megjelenését. Az első két mellékátló éppen a kiinduló egyeseket adja. Az n. mellékátló minden eleme pedig szép sorjában az $(n - 1)$. és az $(n - 2)$. mellékátló egy-egy elemét használja föl

összeadandóként. A másik irányból pedig világos az is, hogy ezen mellékátlók minden eleme pontosan egyszer jelenik meg. Ezzel igazoltuk, hogy valóban a Fibonacci-sorozatról van szó.

1	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	

9. ábra
Mellékátló összegek

VII. Végezetül arról ejtsünk néhány szót, hogy milyen a táblázatban a páros és a páratlan, illetve adott természetes számmal osztható számok elhelyezkedése (10. ábra) Érdemes az ábrasorozaton megfigyelni, hogy akkor kapunk tisztán önhasonló mintát, ha a színezést egy prímszámmal való oszthatóság szerint végeztük. Fogalmazzunk meg az ábrák segítségével néhány kérdést az egyes megközelítési módokban!



10. ábra
A Pascal-háromszög színezése

Irodalom

[1] James R. Newman: The World of Mathematics 1. kötet 511-517 o. Tempus 1988 (A binomiális-tétel általánosítása tört és negatív kitevőkre)

[2] Dr. Grosschmid Lajos: Előadások a matematika elemiből 74-99. o. Budapest. M. Kir. Tudományegyetemi Nyomda

[3] Pólya György: A problémamegoldás iskolája 1. kötet 81-111. o. Budapest, Tk. 1967

[4] Fekete Zoltán – Targenszky I. György: Kombinatorika 23-47. o. Budapest, Tk. 1952

[5] Lovász László – Vesztergombi Katalin – Pelikán József: Kombinatorika 31-49. o. Budapest, Tk. 1970

[6] Török Judit: A Fibonacci-sorozat 15-18.o. Budapest, 1984

[7] Érdekes Matematikai Gyakorló Feladatok I – VII.

Kosztolányi József

Egy népszerű játék matematikája[1]

A szerencsejátékok, a hozzájuk kapcsolódó problémák, feladatok igen hasznos forrásai a valószínűségszámítás tanításának. Tapasztalatom szerint a gyerekek érdeklődését felkeltik az ilyen jellegű problémák, és ezen motiváció birtokában bizonyos kérdések matematikai elemzése lehetővé teszi a tanár számára a valószínűségszámítás alapvető fogalmainak, eljárásainak, számolási módszereinek felfedeztetését, bemutatását, megismertetését.

A következőkben egy talán kevéssé ismert, de bizonyos országokban igen népszerű játéktermi szerencsejáték egyszerűsített változatai kapcsán ismertetek néhány olyan feladatot, problémát, amelyek, véleményem szerint, iskolai feldolgozásra alkalmasak.

Az eredeti BINGO játékról

A játékot főleg kaszinókban, vendéglátó egységekben, esetleg televíziós szerencsejáték formájában játsszák. A játékosok adott áron vásárolnak egy vagy több 5×5-ös kártyát, amelyen 24 szám található, a középső mezőt kivéve minden mezőn egy szám. Ezek a számok mezőnként különböző, 1 és 75 közötti egész számok. Az első oszlopban 1 és 15 közötti (1 és 15 is lehet), a második oszlopban 16 és 30 közötti, a harmadik oszlopban 31 és 45 közötti, a negyedik oszlopban 46 és 60 közötti, míg az ötödik oszlopban 61 és 75 közötti számok állhatnak csak, viszont az adott intervallumon belüli elrendezés véletlenszerű. A középső szabad mező akármelyik 1 és 75 közötti egész számot jelentheti. Egy ilyen kártya az *1. ábrán* látható.

Egy urnában 75 darab külsőre teljesen egyforma golyó található 1-től 75-ig megszámozva. A játékot irányító személy ezek közül húz egy alkalommal egyet véletlenszerűen, visszatevés nélkül, majd a kihúzott számot ismerteti a játékosokkal. (A gyakorlatban a véletlenszerű húzás elektromos úton történik, és a kihúzott számok egy elektromos kijelzőn jelennek meg.) Ha egy kártya valamelyik oszlopában, sorában vagy átlójában levő számokat már mind kihúzták, akkor a kártya birtokosának nagyon gyorsan azt kell kiáltania, hogy BINGO. Ha az ő kiáltása volt az első, akkor ő nyert. Persze előfordulhat, hogy egyszerre több kártyán is nyerő helyzet alakult ki, ezért ha egyszerre többen is kiáltottak, akkor a kiáltásokat figyelő személyzet határozza meg, hogy ki volt az első, tehát döntetlen az eredeti játékban nincs. (A játéknak ez utóbbi, gyorsasági komponense eléggé zajossá teszi az ilyen játéktermeket.) Az első bekiabálás után többféle folytatási lehetőség van, mindkettőre láttam példát. Az egyik esetben teljesen újra indul a játék, a másikban az első helyről leszorultak arányosan csökkentett nyereményt kapnak, és a játék folytatódik az urna teljes kiürítéséig.

B	I	N	G	O
1	17	31	48	74
4	23	33	57	68
11	26		46	62
8	19	44	50	71
14	24	41	60	65

1. ábra

[1]Az 1998. évi VARGA TAMÁS MÓDSZERTANI NAPOK keretében elhangzott előadás írott változata.

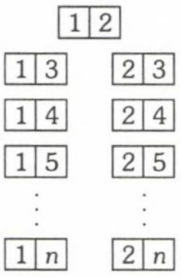
Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy adott kártyakészlet esetén melyik kártyát érdemes választani, melyik nyerési esélye a legnagyobb. Ennek megválaszolása az eredeti játék esetén rendkívül komplikált, a megfelelő számítások elvégzésére nincs idő a kártyavásárlás során. Az eredeti játék emiatt valóban szerencsejáték, viszont lényegesen leegyszerűsítve az említett számítások elvégzésére is lehetőség nyílik.

BINGO játék dominókártyákkal

Az eredeti BINGO kártyán igen sok nyerési kombináció található, ezért célszerű úgy egyszerűsíteni, hogy a továbbiakban egy kártya egy nyerési kombinációt jelentsen. A legegyszerűbb ilyen kártya a 2×1-es dominó kártya, amelyen két különböző pozitív egész szám található növekvő sorrendben elhelyezve. Az $\boxed{1}\boxed{2}$ kártya, például akkor nyer, ha az 1-es és a 2-es golyót is kihúzták. Ha n golyó van az urnában, akkor összesen $\frac{n(n-1)}{2}$ különböző dominókártya lehetséges, persze nem szükségszerű mindegyiket bevonni a játékba. A játék lefolyására vonatkozóan is tehetünk egyszerűsítő feltételezéseket: 1. A játékosok szabadon választhatnak kártyát az adott kártyakészletből, amelyben a választható kártyák egy példányban vannak jelen. 2. A játékosok láthatják egymás kártyáit. 3. Döntetlen esetén a nyertesek megegyező arányban osztoznak a nyereményen, tehát a bekiabálós gyorsasági komponenst kivesszük a játékból. (Ez utóbbi iskolai játék esetén más szempontból is könnyítő feltétel a tanár számára.) 4. A számoknak a kártyán történő elhelyezkedésére nézve a már említett monotonitási megkötésen kívül nem szabunk semmiféle feltételt.

A továbbiakban néhány konkrét kártyakészlet esetén fogjuk az egyes kártyák nyerési valószínűségét meghatározni. Módszertani szempontból fontos, hogy amikor gyerekekkel dolgozzuk fel ezeket a játékhelyzeteket, akkor mindig játsszunk előbb, és a tapasztalatok rendszerezése után kezdjünk neki a játékok matematikai elemzésének.

1. feladat: *A 2. ábrán látható kártyakészlet esetén határozzuk meg az egyes kártyák nyerési esélyeit, ha tudjuk, hogy csak ezek a kártyák vesznek részt a játékban! (Az urnában n golyó van.)* (Konkrét játék esetén természetesen az n értéke is konkrét, pl. $n = 10$.)



2. ábra

A készlet $2n - 3$ kártyát tartalmaz. Az $\boxed{1}\boxed{2}$ kártya eléggé kakukktojás jellegű, kezdjük vele a nyerési valószínűség számolását. A többi kártyát is figyelembe véve észrevehető, hogy az $\boxed{1}\boxed{2}$ kártya csak akkor nyer, ha az első két húzásra az 1-es és a 2-es golyót húzzuk, ellenkező esetben valamelyik másik kártya fog nyerni. Így az $\boxed{1}\boxed{2}$ kártya nyerési valószínűsége $P(1;2) = \frac{2}{n(n-1)}$. Észrevehető, hogy döntetlen ezzel a készlettel nem fordulhat elő, így ha egyenlőek lennének a nyerési esélyek, akkor minden kártya nyerési valószínűsége $\frac{1}{2n-3}$ lenne. Egyszerű számolással adódik, hogy ez $n > 3$ esetén nagyobb, mint az $\boxed{1}\boxed{2}$ kártya nyerési valószínűsége. Ezt a kártyát tehát nem érdemes választani. A többi kártya nyerési valószínűsége szimmetria okokból egyenlő, így ha p jelöli ezt a valószínűséget, akkor

$$(2n-4)p + \frac{2}{n(n-1)} = 1,$$

ahonnan

$$p = P(1;\, k) = P(2;\, k) = \frac{n+1}{2n(n-1)} \quad (3 \le k \le n).$$

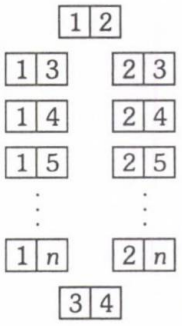
Az $\boxed{1}\boxed{2}$ kártya tehát kifejezetten „vesztő kártya".

2. feladat: *A 3. ábrán látható n kártyából álló kártyakészlet esetén mekkora a nyerési valószínűsége a* 3 4 *kártyának? (Az urnában most is n golyó van.)*

3. ábra

Észrevehető, hogy a 3 4 kártya nyerését csak az 1-es, 3-as és 4-es golyók egymáshoz viszonyított húzási sorrendje befolyásolja, függetlenül attól, hogy a húzási sorban hol helyezkednek el. Minden olyan esetben a 3 4 kártya nyer, amikor a 3-as és a 4-es golyót hamarabb húzták ki, mint az 1-es golyót. E három szám 6 permutációjából tehát 2 jó, így $P(3;\,4)=\frac{1}{3}$. Az eredmény meglepő, hiszen a kapott nyerési esély nagy, és n-től független. A 3 4 kártya tehát kifejezetten „nyerő kártya". A többi kártya nyerési valószínűségének meghatározása már bonyolultabb, ugyanis ennél a készletnél döntetlenek is előfordulhatnak (akár többszörös döntetlenek is), és ilyenkor a nyereményen osztozni kell, amit az egyes valószínűségek kiszámításánál figyelembe kell venni. (Ilyen esetekben tulajdonképpen várható nyereményt kell számolnunk az egyetlen kártya győzelme esetén kapható nyereményt egységnek tekintve. Ilyen számításra a későbbiekben még látunk példát.) Ezen bonyolultabb számítások eredményeképpen adódik, hogy $P(1;\,3) = P(1;\,4) = \frac{n+1}{2n(n-1)}$, és $P(1;\,k)=\frac{2n+1}{3n(n-1)}$ $(k = 2, 5, 6, \ldots, n)$.

3. feladat: *Egyesítsük az előző két feladat kártyakészletét (4. ábra), és határozzuk meg az* 1 2 *és a* 3 4 *kártya nyerési valószínűségét ebben az esetben!*

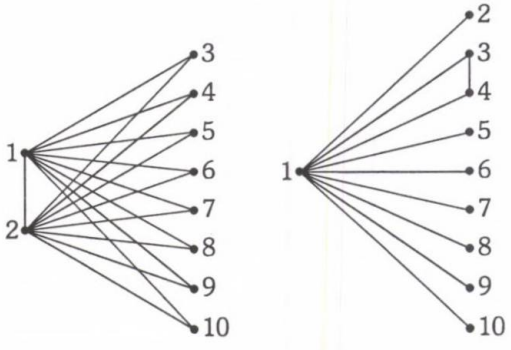


4. ábra

Az 1 2 kártya továbbra is csak akkor nyerhet, ha az első két húzás 1-es és 2-es, így nyerési esélye nem változik. A 3 4 nyerése szempontjából most az 1-es, 2-es, 3-as és 4-es golyók egymáshoz viszonyított húzási sorrendje számít, mégpedig ezen sorrend akkor jó, ha mind a 3-as, mind a 4-es golyó megelőzi az 1-es és a 2-es golyót. A lehetséges 24 sorrendből tehát most 4 jó, ezért $P(3;\,4)=\frac{1}{6}$.

Kártyakészletek szemléltetése gráfokkal

A dominókártyákkal történő játék kezdő kártyakészletei jól szemléltethetők gráfokkal. Feleltessünk meg minden egyes golyónak egy pontot, és két pont pontosan akkor legyen éllel összekötve, ha van a készletben olyan kártya, amely az összekötött pontoknak megfelelő számokat tartalmazza. Az 1. és a 2. feladat kártyakészleteihez rendelt gráfokat $n = 10$ esetére az *5. ábra* mutatja.



5. ábra

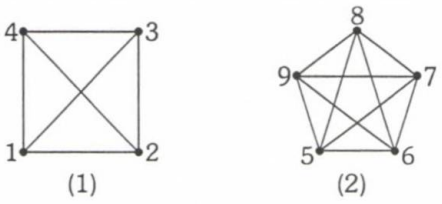
Az 1. készlet gráfján jól látható, hogy a „vesztő kártya" két végpontjából pontosan 9 él indul ki, ami azt jelenti, hogy ezen számok egyikének kihúzása még 9 másik kártyát hozhat nyerő vagy potenciálisan nyerő helyzetbe. A 2. készlet „nyerő kártyájának" végpontjaiból viszont csak egy-egy másik él indul ki, amiből adódóan kihúzásuk csak egy-egy másik kártyát hoz rivális helyzetbe. Mindezeket figyelembe véve a kártyaválasztáskor olyan kártyát érdemes választani, amelynek számai csak kevés kártyán szerepelnek. Ez persze nem tükrözi egzaktul a nyerési esélyeket, ugyanis két olyan kártya nyerési valószínűsége, amelyek végpontjai páronként egyező fokszámúak, lehet különböző. (Erre a későbbiekben még látunk példát.)

Adott kártyakészlet gráfja a játék matematikai elemzéséhez segítséget nyújtó szemléletes modell, ezért alkalmazása az iskolai feldolgozás során módszertani szempontból is nagyon fontos. Ezen szemléltetés segítségével például pontos választ tudunk adni arra, hogy az első két feladat kártyakészletei esetén bizonyos kártyáknak miért egyezik meg a nyerési esélye. (Ott egyszerűen, de kicsit ködösen szimmetria okokra hivatkoztunk.) Egy adott kártyakészlet két kártyájának a nyerési valószínűsége megegyezik, ha van a megfelelő gráf pontjai halmazának egy olyan önmagára történő kölcsönösen egyértelmű leképezése, hogy az eredeti gráfban két pont pontosan akkor van éllel összekötve, ha a képpontok is éllel vannak összekötve, és a két tekintett kártya egymás képei ezen bijekcióban. (Röviden szólva, ha a gráfnak van olyan automorfizmusa, amelyben a tekintett kártyák egymás képei.)

A következő két feladatban a kártyakészleteket gráffal adjuk meg, és így számoljuk ki a megfelelő nyerési valószínűségeket.

4. feladat: *Határozzuk meg a 6. ábrán látható kártyakészlet egyes kártyáinak nyerési valószínűségeit! (Az urnában 9 golyó van.)*

A kártyakészlet gráfja két teljes gráfkomponensből áll, ebből adódóan a játék legfeljebb 3 húzás után befejeződik, és döntetlen nem fordulhat elő. Egy komponensen belül az egyes kártyák nyerési valószínűségei az előzőekben említett okok miatt megegyeznek. Kérdés viszont, hogy a játék elején melyik komponensből érdemes kártyát választani.



6. ábra

Jelölje $P_k^{(1)}$ illetve $P_k^{(2)}$ $(k = 2, 3)$ annak a valószínűségét, hogy az (1), illetve (2) komponensből egy kiszemelt kártya k húzásból nyer. Ezekkel a jelölésekkel

$$P_2^{(1)} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}, \quad P_3^{(1)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{126},$$

és mivel ezek egymást kizáró események valószínűségei, ezért az (1) komponens egy kiszemelt kártyájának a nyerési valószínűsége

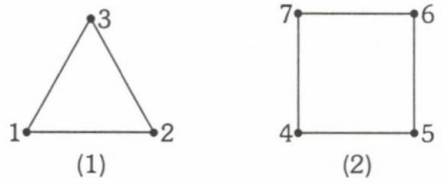
$$P^{(1)} = P_2^{(1)} + P_3^{(1)} = \frac{1}{36} + \frac{5}{126} = \frac{17}{252}.$$

Hasonló megfontolásokat alkalmazva kapjuk, hogy

$$P^{(2)} = P_2^{(2)} + P_3^{(2)} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 8} \cdot \frac{1}{10} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 4}{9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot 2 \cdot \frac{1}{10} =$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{2}{63} = \frac{15}{252}.$$

Látható, hogy az (1) komponensből érdemes kártyát választani.

5. feladat: *Határozzuk meg a 7. ábrán látható kártyakészlet egyes kártyáinak nyerési valószínűségeit! (Az urnában 7 golyó van.)*



7. ábra

A gráf itt is két komponensű, s bár látszólag egyszerűbb, mint az előző feladat esetében, a megfelelő valószínűségek számítása kompli-

káltabb lesz. Ennek oka elsősorban az, hogy ebben a játékban már előfordulhat, hogy két kártya egyidejűleg nyer, s ekkor, mint már említettük, a nyereményen való osztozkodást figyelembe kell venni a nyerési esélyek számolásánál. Ez a játék legfeljebb 4 húzásig tart, és az egyes komponenseken belül a kártyák nyerési valószínűségei megegyeznek. Ezt figyelembe véve, és az előző feladat jelöléseit alkalmazva az (1) komponens egy kiszemelt kártyájára nézve

$$P^{(1)} = P_2^{(1)} + P_3^{(1)} + P_4^{(1)} =$$

$$= \frac{3\cdot 2}{7\cdot 6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5}\cdot 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{4\cdot 1\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}\cdot 3\cdot\frac{1}{3} = \frac{16}{105}.$$

A (2) komponensből egy kiszemelt kártya két húzásból $P_2^{(2)} = \frac{4\cdot 2}{7\cdot 6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{21}$ valószínűséggel nyer. 3, illetve 4 húzás esetén ennél a komponensnél már döntetlen is előfordulhat (4 húzás esetén csak döntetlen), ezért $P_3^{(2)} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5}\cdot 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{4\cdot 1\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{105}$, és $P_4^{(2)} = \frac{4\cdot 1\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}\cdot 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{140}$. Ezek alapján

$$P^{(2)} = P_2^{(2)} + P_3^{(2)} + P_4^{(2)} =$$

$$= \frac{1}{21} + \frac{7}{105} + \frac{3}{140} = \frac{57}{420} = \frac{19}{140}.$$

Az (1) komponens kártyáinak nyerési valószínűsége $\frac{64}{420} - \frac{57}{420} = \frac{7}{420}$-al nagyobb, mint a (2) komponens kártyáinak nyerési valószínűsége. Példa ez arra, hogy bár a gráf minden egyes csúcsának a foka 2, a kártyák nyerési valószínűségei mégis különböznek.

Az előző két példa nagyon speciális volt, így viszonylag egyszerűen lehetett számolni a kártyák nyerési esélyeit. Nagyon könnyen konstruálhatók jóval bonyolultabb szerkezetű kártyakészletek. Ha például a 7. *ábra* gráfjának két komponensét egy éllel összekötjük, akkor ez a látszólag apró változtatás igencsak megnehezíti a számításokat. Iskolai feldolgozás során persze lehet, és talán ajánlatos is a fentieknél egyszerűbb példákat is mutatni.

Egy érdekes példa L-alakú BINGO kártyákkal

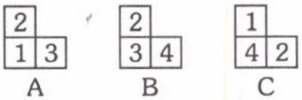
Az előző példák dominókártyákra vonatkoztak, amelyeken egyetlen nyerési kombináció volt. Könnyű olyan kártyát konstruálni, amely két nyerési kombinációt tartalmaz. A dominókártyából egy mező hozzávételével adódnak az L-alakú BINGO kártyák, amelyeken három különböző pozitív egész szám két nyerési kombinációt jelent, egyet függőlegesen, egyet pedig vízszintesen. A *8. ábrán* látható kártya például az 1 és 2, valamint a 2 és 3 számok kihúzása esetén is nyer. (1 és 3 esetén nem, tehát az átló most nem jelent nyerő helyzetet.)

8. ábra

Az ilyen típusú kártyákkal kapcsolatban tételezzük fel, hogy mindig a *8. ábrán* látható alakúak, és a bal felső mezőben álló szám kisebb, mint a jobb alsó mezőben álló. Ha n golyó van az urnában, akkor a fenti feltételek figyelembevételével kapjuk, hogy összesen $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ különböző L-alakú BINGO kártya lehetséges. Ilyen típusú kártyákból is meg lehet adni különböző készleteket, és lehet vizsgálni a nyerési esélyeket. Jelen cikk keretei között egyetlen egyszerű, de érdekes példát tárgyalunk.

6. feladat: *Legyen az urnában 4 golyó, és a 9. ábrán látható kártyák „mérkőzzenek meg" egymással minden lehetséges párosításban, azaz úgy, hogy egy játékban mindig csak két kártya vegyen részt. Mindhárom játék kapcsán vizsgáljuk meg az adott kártyák nyerési esélyeit!*

4 golyónak 24 kihúzási sorrendje van, ezért érdemes az egyes „párharcok" eredményét megnézni az összes lehetséges húzási sorrend esetén.



9. ábra

Lehetséges húzási sorrendek	*A – B párharc győztese*	*B – C párharc győztese*	*C – A párharc győztese*
1234	A	B	A
1243	A	C	A
1324	A	B	A
1342	A	döntetlen	A
1423	A	C	C
1432	döntetlen	C	C
2134	A	B	A
2143	A	C	A
2314	B	B	A
2341	B	B	C
2413	A	C	C
2431	B	C	C
3124	A	B	A
3142	A	döntetlen	A
3214	B	B	A
3241	B	B	C
3412	B	B	döntetlen
3421	B	B	C
4123	A	C	C
4132	döntetlen	C	C
4213	A	C	C
4231	B	C	C
4312	B	B	döntetlen
4321	B	B	C

Az A – B párviadal A-nak előnyös, ugyanis 12-szer ő nyer, két esetben döntetlen helyzet áll elő, 10 esetben pedig B a győztes. Hasonlóan adódik, hogy a B – C csata B-nek, míg a C – A párharc C-nek előnyös. Az „előnyös" reláció tehát nem tranzitív, az a valószínűbb, hogy körbe verik egymást.

Természetesen nagyon sok kérdés vethető még fel a BINGO játékkal kapcsolatban. Lehet konstruálni egyszerűbb, nehezebb feladatokat, meg lehet vizsgálni más típusú kártyákkal játszott játékokat. Bonyolultabb játékok esetén a számítógép is segítségül hívható, néhány komplikáltabb számítás elvégzéséhez is hasznos eszköz lehet. Jelen cikkecske célja mindössze az volt, hogy egy tanítási szempontból is hasznos és érdekes témát felvillantson, és kipróbálásra, továbbgondolásra ösztökéljen.

Irodalom

[1] Mark Krosky: Is Bingo Fair? – QUANTUM, May/June 1998, Volume 8, Number 5

Dr. Urbán János

Lánctörtek és alkalmazásaik[1]

Induljunk ki a következő feladatból! Oldjuk meg az

$$x = \frac{1}{1+x} \qquad (1)$$

egyenletet a pozitív valós számok körében!

Első gondolatként azonnal adódik, hogy mivel $x > 0$, szorozzuk az (1) mindkét oldalát $1 + x$-szel, majd rendezzük. Így a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Ennek pozitív gyöke: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, amely mellesleg az aranymetszés aránya.

Gondolkodhatunk a következő módon is. Az (1)-et úgy értelmezhetjük, hogy az $x > 0$ szám azonos az $\frac{1}{1+x}$ számmal. Írjunk a jobb oldalon álló tört nevezőjében x helyére $\frac{1}{1+x}$-et, így (1)-ből ezt kapjuk:

$$x = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} \qquad (2).$$

Ezt a helyettesítést (2) jobb oldalán újra megismételhetjük:

[1]Az 1998. évi VARGA TAMÁS MÓDSZERTANI NAPOK keretében elhangzott előadás írott változata.

$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}}.$$

A helyettesítés korlátlanul folyatható, így arra a megállapodásra juthatunk, hogy az (elvben) végtelen sok helyettesítés után:

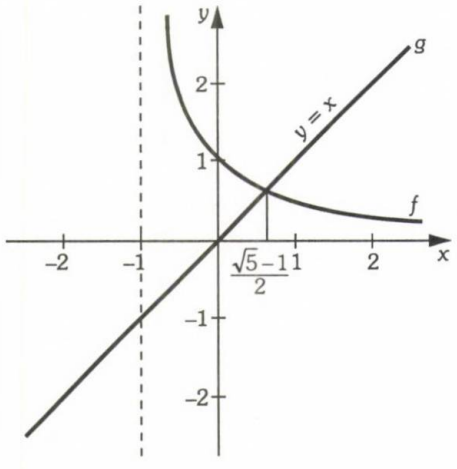
$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}},$$

ahol a jobb oldalon az egyelőre szimbolikusan használt végtelen lánctört áll. Nyilván ennek úgy célszerű értelmet adni, hogy a végtelen lánctört értéke $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, az (1) már meghatározott pozitív gyökével legyen azonos.

Nézzük meg egy új oldalról az (1) egyenletet. Értelmezhetjük úgy is, hogy – az egyszerűség kedvéért az $x > -1$ valós számokra – két függvényt értelmezünk:

$$g(x) = x \text{ és } f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Azt kérdezzük, hol lesz egyenlő a pozitív valós számok körében a két függvény értéke. Szemléltessük a függvények grafikonjait:



1. ábra

Vizsgáljuk a következő sorozatot: $x_0 = 1$,

(3) $$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \text{ ha } n \geq 0.$$

A sorozat első néhány eleme: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{3}{5}$, $x_4 = \frac{5}{8}$, $x_5 = \frac{8}{13}$. A sorozat definícióját így is megadhatjuk:

$$x_0 = 1, x_{n+1} = f(x_n).$$

Ennek alapján az egyes tagok a következőképpen is írhatók: $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$, $x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)))$, ..., vagyis az f függvény iterációjáról van szó.

A (3) sorozatról az a sejtés alakul ki, hogy éppen a jól ismert Fibonacci-sorozat, azaz az

$$f_0 = 1, f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1},$$

sorozat két szomszédos tagjának hányadosa:

$$x_0 = \frac{f_0}{f_1}, \; x_1 = \frac{f_1}{f_2}, \; x_2 = \frac{f_2}{f_3}, \; x_3 = \frac{f_3}{f_4},$$

általában

(4) $$x_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}.$$

Sejtésünket teljes indukcióval azonnal igazolhatjuk.

A (4) egyenlőség $n = 0$-ra igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz, ekkor a (3) definíciója alapján

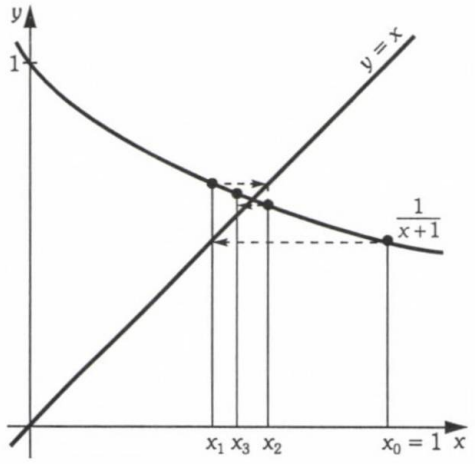
$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+\frac{f_n}{f_{n+1}}} = \frac{f_{n+1}}{f_n + f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}$$

a Fibonacci-sorozat definíciója szerint.

A (3) sorozat elemeit a végtelen lánctört közelítő törtjeinek nevezzük. A sorozat első néhány eleme a következő módon „viselkedik" a növekedésüket-fogyásukat vizsgálva:

$$x_0 = 1 > x_2 = \frac{2}{3} > x_4 = \frac{5}{8} > \ldots$$
$$x_1 = \frac{1}{2} < x_3 = \frac{3}{5} < x_5 = \frac{8}{13} < \ldots .$$

Az 1. ábráról a két függvény grafikonjának metszéspontja körüli részt „kinagyítva" ezt szemléletessé is tehetjük:



2. ábra

A sejtés igazolásához vizsgáljuk a két szomszédos közelítő tört különbségét.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} - \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}}{f_{n+1} f_{n+2}}. \qquad (5)$$

A számlálót az n néhány értékére kiszámítva:

$$f_1^2 - f_0 f_2 = -1,$$
$$f_2^2 - f_1 f_3 = 1,$$
$$f_3^2 - f_2 f_4 = -1$$

kialakul a sejtés:

$$f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^{n+1}. \qquad (6)$$

A (6) egyenlőség $n = 0, 1, 2$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz, és lássuk be $n + 1$-re.

$$f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+3} = f_{n+2}(f_n + f_{n+1}) - f_{n+1}(f_{n+1} + f_{n+2}) =$$
$$= f_{n+2} f_{n+1} - f_{n+1}^2 = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}.$$

Ezzel teljes indukcióval igazoltuk a sejtést (közben csak a Fibonacci-sorozat definícióját használtuk fel).

Mivel a Fibonacci-sorozat tagjai pozitív egész számok, és a sorozat szigorúan nő, a bizonyított (6) egyenlőségből az (5) különbség előjele:

(7) $$x_{n+1} - x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{f_{n+1} f_{n+2}}.$$

Ennek alapján

$$x_{2n} - x_{2n-1} = \frac{1}{f_{2n} f_{2n+1}} > 0$$

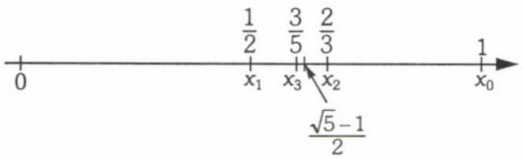
és

$$x_{2n+2} - x_{2n} = x_{2n+2} - x_{2n+1} + x_{2n+1} - x_{2n} =$$
$$= \frac{1}{f_{2n+2} f_{2n+3}} - \frac{1}{f_{2n+1} f_{2n+2}} = \frac{f_{2n+1} - f_{2n+3}}{f_{2n+1} f_{2n+2} f_{2n+3}} < 0,$$

míg

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = x_{2n+1} - x_{2n} + x_{2n} - x_{2n-1} =$$
$$= \frac{-1}{f_{2n+1} f_{2n+2}} + \frac{1}{f_{2n} f_{2n+1}} = \frac{f_{2n+2} - f_{2n}}{f_{2n} f_{2n+1} f_{2n+2}} > 0.$$

Szemléltessük most a számegyenesen a (3) sorozat elemeit, azaz a közelítő törtek sorozatát:



3. ábra

A szemléltetés alapján világos, hogy az x_{2n+1} sorozat monoton növő, felülről korlátos, az x_{2n}, sorozat monoton fogyó, és alulról korlátos, tehát mindkettő külön-külön konvergens.

A (7) összefüggésből következik, hogy

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}} \quad \text{és}$$

mivel $\lim f_{n+1} f_{n+2} = +\infty$, a (3) sorozat tagjainak különbsége 0-hoz tart, tehát a sorozat konvergens. A definícióból adódik, hogy ha x jelöli a sorozat határértékét, akkor x az $x = \frac{1}{1+x}$ egyenlet pozitív gyöke, tehát $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

A kapott eredmény jogosít fel arra, hogy a végtelen lánctörtet azonosítsuk a közelítő törtek sorozatának határértékével.

Induljunk ki most megfordítva, és kíséreljük meg a $\sqrt{2}$ -t felírni végtelen lánctört alakban. Válasszuk le a $\sqrt{2}$ egész részét, és ehhez adjuk hozzá a tört részét:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1.$$

Mivel

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2+\sqrt{2}-1} \qquad (8)$$

a (8) egyenlőségből már adódik a folytatás:

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}}, \text{ illetve}$$

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}.$$

Tehát

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}.$$

A végtelen lánctört szokásos, rövidebb írásmódja szerint

$$\sqrt{2}=[1;2,2,2,\ldots].$$

Az egyenlőség itt is azt jelenti, hogy a végtelen lánctört közelítő törtjeinek sorozata konvergens, és $\sqrt{2}$ -höz tart. Ezt a következőképpen láthatjuk be.

A közelítő törteket például a következő rekurzív definícióval adhatjuk meg:

$$x_0 = 1,$$
$$x_{n+1}=1+\frac{1}{1+x_n}. \qquad (9)$$

Az első néhány x_n érték és ezek egymás közti viszonya:

$$x_0=1<x_2=\frac{7}{5}<x_4=\frac{41}{29}<\ldots$$
$$x_1=\frac{3}{2}>x_3=\frac{17}{12}>x_5=\frac{99}{70}>\ldots .$$

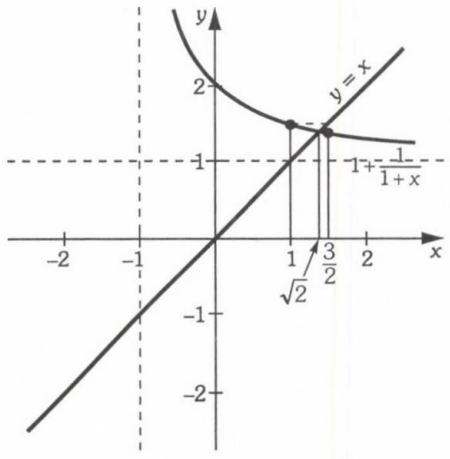
Teljes indukcióval igazolható, hogy x_{2n}, részsorozat monoton növő, x_{2n+1} részsorozat monoton fogyó, mindkettő korlátos is, így mindkettő konvergens.

Hasonló módon az előző esethez, a két szomszédos tag különbségének abszolút értéke, tehát a páros és páratlan indexű részsorozat különbsége 0-hoz tart. Ebből következik, hogy a (9) sorozat konvergens, és határértéke az

$$x=1+\frac{1}{1+x}$$

egyenlet pozitív gyöke, $x=\sqrt{2}$.

A (9) sorozatot és határértékét az $f(x)=1+\frac{1}{1+x}$ és $g(x)=x$, $x>-1$ függvények közös ábráján szemléltethetjük:



4. ábra

Az általános esetben legyen q_0 nem negatív egész szám, q_n $n \geq 1$-re pozitív egész , akkor a

$$[q_0; q_1,q_2,q_3,\ldots q_n,\ldots]$$

végtelen lánctört vagy más alakban:

$$q_0+\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{\ldots+\frac{1}{q_n+\ldots}}}}$$

értéke az $x_0 = q_0$,

$$x_n=q_0+\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{\ldots+\frac{1}{q_n}}}} \qquad (10)$$

sorozat határértéke. Ahhoz, hogy ez a definíció jogos legyen, meg kell mutatni, hogy a (10) sorozat konvergens.

A (10) sorozat elemeit a lánctört közelítő törtjeinek nevezzük.

Első lépésként írjuk fel a közelítő törteket $\frac{a_n}{b_n}$ alakban, ahol $n \geq 1$ esetén a_n, b_n pozitív egészek, és $(a_n; b_n) = 1$.

Írjuk fel az első néhány n értékre a_n-et és b_n-et:

$$a_0 = q_0; \qquad b_0 = 1,$$
$$a_1 = q_0q_1 + 1; \qquad b_1 = q_1,$$
$$a_2 = q_2(q_0q_1 + 1) + q_0; \qquad b_2 = q_2q_1 + 1.$$

Vizsgáljuk még a következő különbségeket is:

$$a_1b_0 - a_0b_1 = 1,$$
$$a_2b_1 - a_1b_2 = -1.$$

Igaz, hogy $(a_0; b_0) = 1$. Ugyancsak fennáll az $(a_1; b_1) = 1$ összefüggés is, hiszen ha $d > 0$ egész, és $d \mid a_1$ és $d \mid b_1$, akkor d osztója az $a_1b_0 - a_0b_1 = 1$ különbségnek is, tehát $d = 1$. Ugyanígy adódik az $a_2b_1 - a_1b_2 = -1$ egyenlőségből, hogy $(a_2; b_2) = 1$.

Az általános esetre a sejtést az alábbi módon fogalmazhatjuk meg.

(11) $a_{n+2} = a_{n+1}q_{n+2} + a_n$,

(12) $b_{n+2} = b_{n+1}q_{n+2} + b_n$,

(13) $a_{n+2}b_{n+1} - a_{n+1}b_{n+2} = (-1)^{n+1}$,

(14) $(a_{n+2}; b_{n+2}) = 1$, ha $n > 0$.

A (11), (12), (13) összefüggéseket egyszerre lehet teljes indukcióval igazolni, a (14) már egyszerű következménye (13)-nak.

Az állítások $n = 0$-ra igazak. Tegyük fel, hogy n-re is igazak, és mutassuk meg, hogy ebből következik, hogy $n + 1$-re is igazak.

A feltevés szerint az $n + 2$-edik közelítő tört:

$$\frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} = \frac{a_{n+1}q_{n+2} + a_n}{b_{n+1}q_{n+2} + b_n}.$$

Világos, hogy itt mind a számlálóban, mind a nevezőben q_{n+2} csak a kiírt helyen szerepel, hiszen sem a_n, b_n, sem a_{n+1}, b_{n+1} „felépítésében" q_{n+2} nem vesz részt. A következő, eggyel nagyobb indexű közelítő tört ebből úgy keletkezik, hogy q_{n+2} helyett mindenütt ezt írjuk: $q_{n+2} + \frac{1}{q_{n+3}}$. Így a tört bővítésével kapjuk, hogy

$$\frac{a_{n+3}}{b_{n+3}} = \frac{a_{n+1}\left(q_{n+2} + \frac{1}{q_{n+3}}\right) + a_n}{b_{n+1}\left(q_{n+2} + \frac{1}{q_{n+3}}\right) + b_n} =$$

$$= \frac{(a_{n+1}q_{n+2} + a_n)q_{n+3} + a_{n+1}}{(b_{n+1}q_{n+2} + b_n)q_{n+3} + b_{n+1}} = \frac{a_{n+2}q_{n+3} + a_{n+1}}{b_{n+2}q_{n+3} + b_{n+1}}.$$

Ebből már a megfelelő állítások $n + 1$-re könnyen adódnak.

A (13) egyenlőség felhasználásával két szomszédos indexű közelítő tört különbsége:

$$(15) \qquad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}}{b_nb_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{b_nb_{n+1}}.$$

Mivel b_n és b_{n+1} pozitív egészek, és nyilván $b_{n+1} > b_n$, a különbség előjele csak n-től függ, valamint $n \to \infty$ esetén a különbség 0-hoz tart.

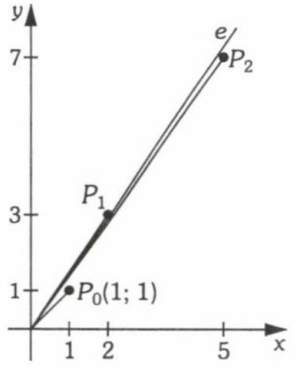
A (15) segítségével itt is adódik, hogy a páros indexű közelítő törtek sorozata monoton növő, és nyilván felülről korlátos, a páratlan indexűeké monoton fogyó, és alulról korlátos, tehát mindkét sorozat konvergens. A határértékük közös, ez lesz éppen a végtelen lánctört értéke. Így jogos azt mondani, hogy minden végtelen lánctört értéke egy valós szám, a közelítő törtek sorozatának határértéke.

Vizsgáljuk meg egy új oldalát a lánctört közelítő törtjeinek. Feleltessük meg az $\frac{a_n}{b_n}$ közelítő törtnek a $P_n(b_n; a_n)$ rácspontot (egész koordinátájú pontot) a síkon.

Például a $\sqrt{2}$ lánctört alakjának első négy közelítő törtjéhez a következő pontok tartoznak ebben a megfeleltetésben:

$P_0(1; 1)$, $P_1(2; 3)$, $P_2(5; 7)$, $P_3(12; 17)$.

A síkbeli derékszögű koordinátarendszerben szemléltessük az OP_0, OP_1, OP_2 szakaszokat, és az $y = \sqrt{2}x$ egyenletű e egyenes első síknegyedbe eső felét. Az OP_0 az e alatt, az OP_1 az e felett, az OP_2 újra az e alatt halad.



5. ábra

Könnyű kiszámolni, hogy az OP_0P_1 és az OP_1P_2 háromszög területe is $\frac{1}{2}$.

Általánosan is igazolni fogjuk, hogy az OP_nP_{n+1} háromszög területe $\frac{1}{2}$.

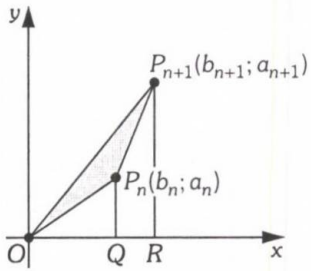
Az olyan rácsháromszögek, amelyeknek területe $\frac{1}{2}$, nem tartalmaznak sem a belsejükben, sem a határukon a csúcstól különböző rácspontot. Hiszen bármely rácsháromszög területe vagy egész szám, vagy egy egész szám fele, ez könnyen végiggondolható abból, ahogy a csúcsok koordinátáiból a háromszög területét kiszámítjuk.

Ha most egy $\frac{1}{2}$ területű rácsháromszög belsejében vagy a határán lenne a csúcsoktól különböző rácspont, akkor további, kisebb területű rácsháromszögekre lehetne felbontani, de ezeknek a területe is legalább $\frac{1}{2}$, ami ellentmondás.

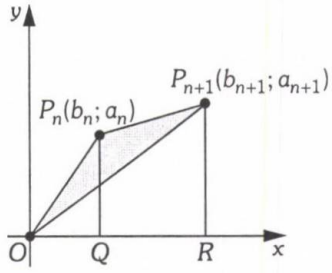
Figyeljük meg, hogy az OP_n félegyenes iránytangense $\frac{a_n}{b_n}$, tehát éppen az n-edik közelítő tört. A szemléltetés azt is mutatja, amit bizonyítottunk is, hogy a $\sqrt{2}$ és $\frac{a_n}{b_n}$ eltérése kisebb mint $\frac{a_n}{b_n}$ és $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ eltérése abszolút értékben, amiről tudjuk, hogy $\frac{1}{b_nb_{n+1}}$. Az a tény, hogy az OP_nP_{n+1} rácsháromszög belsejében és határán nincs a csúcsoktól különböző rácspont, azt is jelenti, hogy a b_n-nél nem nagyobb nevezőjű törtek közül az $\frac{a_n}{b_n}$-nél jobban egyik sem közelíti meg a $\sqrt{2}$-t, tehát ez a lehető legjobb megközelítése (approximációja) a $\sqrt{2}$-nek a b_n-nél nem nagyobb nevezőjű törtek körében.

Befejezésül igazoljuk általánosan, hogy bármely végtelen lánctörthöz tartozó közelítő törteknek megfelelő P_n és P_{n+1} pontokra az OP_nP_{n+1} háromszög területe $\frac{1}{2}$.

A következő két ábra mutatja az O, P_n és P_{n+1} pontok lehetséges elhelyezkedését:



6. ábra



7. ábra

A 6. ábráról leolvasható, hogy az OP_nP_{n+1} háromszög t területét megkapjuk, ha az OP_nR háromszög területéből kivonjuk az OP_nQ háromszög és a $QRP_{n+1}P_n$ trapéz területének összegét.

$$t = \frac{1}{2}\left|a_{n+1}b_{n+1} - (a_nb_n + (a_n + a_{n+1})(b_{n+1} - b_n))\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n\right| = \frac{1}{2}.$$

A 7. ábráról szintén leolvasható, hogy az $OP_{n+1}P_n$ háromszög t területét úgy számíthatjuk ki, hogy az OQP_n háromszög és a $QRP_{n+1}P_n$ trapéz területének összegéből levonjuk az ORP_{n+1} háromszög területét:

$$t = \frac{1}{2}\left|a_nb_n + (a_n + a_{n+1})(b_{n+1} - b_n) - a_{n+1}b_{n+1}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n\right| = \frac{1}{2}.$$

Benkő József – Szabó K. Ágnes

A talpponti háromszög paradigmája[1]

A talpponti háromszög többrendbeli paradigmatikusságának belátására elég csupán utalni arra, hogy: egyrészt a minimumelv mintaszerű működésének bizonyítása, másrészt pedig iteratív alakváltozásai mind a ciklikus [periodikus], mind a kaotikus [ergodikus] viselkedés meggyőző példái. A témakör előremutató, látványos fejleményei napjainkban (l. [3], [4], [10]) összevetve a Fagnano-n keresztül az ókori háromszög-egyenlőtlenségig visszanyúló gyökereivel azt az alapvető didaktikailag is követendő – jelenlét kritériumot elégíti ki, miszerint Jelenvaló, az minek Múltja és Jövője van.

Az alábbi körkép tradicionális törzsanyaga egyéni/személyes stílusban talált folklór, míg az újabb fejlemények tárgyalása direkt az eredeti [3], ill. [4] forráshelyekre támaszkodik. Az egyetlen innováció – a pedál-transzformáció (3.2)-beli törtrészfüggvény előállítása – kényelmesebbé teszi a periodikus pontok tárgyalását, s reményeink szerint az egész gondolatkör követését is elősegíti.

Az anyag összeállításában igen bátorítólag hatottak a témakör legavatottabb megmondhatójának, Lax Péternek a matematika oktatásáról vallott nézetei; ezek rövid kivonata a Függelékben – minden további apológiát fölöslegessé tesz.

1. A szélsőérték elvek az (anyagi) valóság – Popperi értelmében beleszámítva az emberi elme termékeit is (l. [8]) – hatékony (ön)szerveződési követelményei. A matematikában, ennek szabatos megnyilvánulása a metrikák értelmezésében alapkövetelményként szereplő háromszög egyenlőtlenség. Emlékeztetünk, hogy egy $\mathcal{T}$ halmazon értelmezett $d: \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+ : (P, Q) \to d(P, Q)$ leképzést metrikának vagy távolságfüggvénynek akkor nevezünk, ha kielégíti a következő három feltételt;

($d1$) $d(P, Q) > 0$ ha $P \neq Q$ és $d(P, P) = 0$;
($d2$) $d(P, Q) = d(Q, P)$ (szimmetrikusság);
($d3$) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ (háromszög egyenlőtlenség).

A továbbiakban $\mathcal{T}$ mindig egy sík pontjainak halmazát fogja jelenteni, és a metrikának, valamint a sík lineáris szerkezetének szervesebb összekapcsolása érdekében a háromszög egyenlőtlenségben tisztázzuk az egyenlőség esetét megkövetelve, hogy

($d4$) $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$

pontosan akkor teljesüljön, ha az R pont a P és Q pontok által meghatározott $[P, Q]$ zárt szakasz eleme. A számtalan távolságfüggvény közül a továbbiakban kizárólag az Euklidesz-féle metrikát fogjuk használni.
Az őt *jellemző* Pitagorász-féle

($d5$) $d^2(P, Q) = d^2(P, R) + d^2(R, Q) - 2d(P, R)d(R, Q)\cos(P\hat{R}Q)$

összefüggésből ($d3$) és ($d4$) azonnal következik.

A matematika számos alapfontosságú feladata a távolságfüggvény szélsőértékeire vonatkozik, s mivel a feladatok megfogalmazásában szereplő változó(ka)t különféle feltételek korlátozzák, ezért **feltételes szélsőérték feladatok**nak nevezzük ezeket. Az ilyen típusú feladatokkal kapcsolatosan három kérdés tevődik fel: (1) a szélsőérték létezésének igazolása; (2) a változó(k) azon értékeinek megállapítása, amelyben a szélsőérték megvalósul – ezek az ún. *szélsőérték helyek*; (3) a szélsőérték kiszá-

[1] *paradigma* – bizonyításra vagy összehasonlításra alkalmazott példa;
paradigmatikus – mintaszerű, szabályszerű, példaszerű [Bakos, F.: Idegen szavak és kifejezések szótára, Akad. Kiadó Bp. 1989]
paradigm – set of all different form of a word [Oxford Advenced Learner's Dictionary]

mítása. A legegyszerűbb megfogalmazású szélsőérték-feladat.

(1.1) A pont távolsága egy halmaztól. Adott $P \in \mathcal{I}$ pontra és $\mathcal{H} \subset \mathcal{I}$ halmazra megállapítandó a $d(P, X)$ $(X \in \mathcal{H})$ távolságok minimuma.

A feladat legegyszerűbb, de igen fontos esete

(a) A pont távolsága egy egyenestől. *Ha $e \subset \mathcal{I}$ egy egyenes és $P \in \mathcal{I} \setminus e$ egy rajta kívüli pont, akkor a P-ből e-re bocsátott merőleges $P_0 \in e$ talppontja: $d(P, P_0) < d(P, X)$ $(P_0 \neq X \in e)$.*

A feladat visszavezethető a háromszög egyenlőtlenségre: Ha P' P-nek e-re vett szimmetrikusa (tükörképe), akkor $X \neq P_0$ következtében $X \notin [P, P']$ tehát a $(d3)$ és $(d4)$ értelmében $d(P, P') < d(P, X) + d(X, P')$ s mivel $d(P, P') \overset{(d4)}{=} d(P, P_0) + d(P_0, P) = 2d(P, P_0)$ ill. $d(P, X) = d(X, P')$, következik a kijelentésben szereplő egyenlőtlenség.

A Pitagorasz-tételre hivatkozva világos, hogy a $d(P, X)$ és $d(P_0, X)$ távolságok az $X \in e$ pont függvényében egyidejűleg növekszenek vagy csökkennek. Ebből azonnal adódik, hogy

(b) Egy pont távolsága egy konvex halmaztól *legfeljebb egy pontban éri el minimumát.*

Valóban, ha $\mathcal{H}$ konvex és $X_1, X_2 \in \mathcal{H}$ két tetszőleges pontja, akkor az előző gondolatmenetet az X_1 és X_2 által meghatározott e egyenesre alkalmazva:
(1) ha $d(P_0, X_1) \Leftrightarrow d(P_0, X_2)$; akkor $d(P, X_1) <> d(P, X_2)$ tehát egyidejűleg nem lehetnek minimum pontok;
(2) ha $d(P_0, X_1) = d(P_0, X_2)$, akkor P_0 az $[X_1, X_2]$ szakaszfelező pontja, és ezért $d(P, P_0) < d(P, X_1) = d(P, X_2)$ – tehát a $\mathcal{H}$ konvexitásából adódó $P_0 \in \mathcal{H}$ alapján egyik pont sem lehet a minimum helye.

Megjegyzés. Tetszőleges $\mathcal{H}$ esetén a minimum pont létezésének elégséges feltétele $\mathcal{H}$ zártsága; konvex és zárt $\mathcal{H}$ esetén a minimum pont egyértelmű – ez a P pont vetülete a $\mathcal{H}$ halmazra.

A továbbiakban egy $X_1, ..., X_n \in \mathcal{I}$ pontsorozat által meghatározott $[X_1, ..., X_n] := [X_1, X_2] \cup \cup ... \cup [X_{n-1}, X_n]$ poligonális vonal (út) $L[X_1, ..., X_n] := d(X_1, X_2) + ... + d(X_{n-1}, X_n)$ képlettel értelmezett hosszával foglalkozunk. Rögzített $X_1 := P$ és $X_n := Q$ végpontok esetén a legrövidebb út a $[P, Q]$ szakasz, pontosabban:

(1.2) *Ha $P = X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n = Q$ akkor $d(P, Q) \leq d[X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n]$ s az egyenlőség esete pontosan akkor áll fenn, ha a pontsorozat a $[P, Q]$ szakaszon az adott sorrendben helyezkedik el, azaz az (X_i, X_{i+1}) $(1 \leq n)$ nyílt szakaszok (P, Q)-ban vannak és kettőnként diszjunktak.*

Bizonyítás. (n szerinti indukcióval). $n = 2$ esetén nincs mit bizonyítani. Az $n = 3$ esetet a háromszög egyenlőtlenség $[d3]$ és az azt pontosító $[d4]$ fedi le. Végezetül, ha az állítás $n \geq 3$-ra igaz, akkor $(n + 1)$-re két lépésben térünk rá:

$$d(P, Q) = d(X_1, X_{n-1}) \leq (X_1, X_n) + d(X_n, X_{n+1}) \leq$$
$$\leq d(X_1, X_2) + ... + d(X_{n-1}, X_n) + d(X_n, X_{n+1}).$$

A szélek egyenlősége esetén mindkét lépésben az egyenlőség esete áll fenn. Az elsőből az következik, hogy $X_n \in [X_1, X_{n+1}] = [P, Q]$; a másodikból pedig az indukciós hipotézist $[X_1, X_n]$-re alkalmazva – az következik, hogy az $X_1, ..., X_n$ pontok az $[X_1, X_n]$ szakaszon növekvő sorrendben helyezkednek el.

A rögzített végpontú poligonális vonalak hosszára vonatkozó feltételes szélsőértékek közül az alábbi nevezetes:

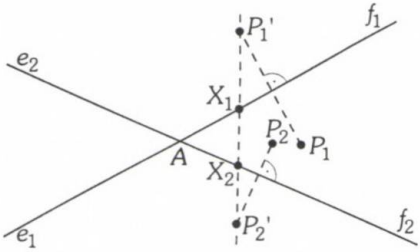
(1.3) *Adott P, Q-pontpárra, valamint az e egyenesre meghatározandó az az $X \in e$ pont, amelyre az $L[P, X, Q]$ hossz a legrövidebb.*

A jól ismert megoldást a részletek megindoklása nélkül adjuk meg: Ha az e egyenes metszi a $[P, Q]$ szakaszt, akkor a metszéspont a megoldás; ellenkező esetben pedig vesszük P-nek e szerinti P' szimmetrikusát, s az $L[P, X, Q] = L[P', X, Q]$ $(X \in e)$ alapján visszatérünk a már letárgyalt esetre.

Az előző feladat természetes bonyolítása a következő:

(1.4) *Adott a P_i $(i = 1, 2)$ pontpár, valamint az e_i $(i = 1, 2)$ egyenespár. Meghatározandók*

azok az $X_i \in e_i$ $(i = 1, 2)$ pontok, amelyekre az $L[P_1, X_1, X_2, P_2]$ minimális.



Az egyeneseknek egymáshoz, valamint az adott pontokhoz való viszonya szempontjából több esetet kell megkülönböztetni, amelyek közül – a további szükségleteinkre való tekintettel – azt tárgyaljuk le, amelyekben az egyenesek egy A pontban metszik egymást, és a $(P_1, P_2) \cap e_i = \emptyset$ $(i = 1, 2)$.

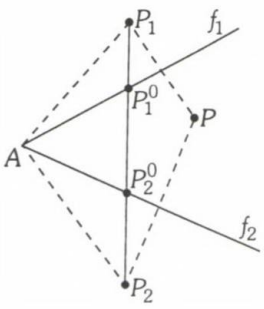
Ha mindkét $i \in \{1, 2\}$-re $P_i \in e_i$, akkor a megoldás $X_i = P_i$ $(i = 1, 2)$. Ha egyik i-re $P_i \in e_i$ míg $j \neq i$-re $P_j \notin e_j$, akkor a feladat az $X_i = P_i$ választással az (1.3)-ra redukálódik. Ha $i \neq j$-re $P_i \in e_j$, akkor a feladat ismét az (1.3)-ra vezethető vissza (a részletekre nem térünk ki). Jelölje f_i e_i-nek azt az A által meghatározott félegyenesét, amelyre $[P, Q]$ az f_1 és f_2 által bezárt szög belsejében van. Jelölje P_i' a P_i pont szimmetrikusát az e_i egyenesre. Ha $[P_1', P_2']$ az f_i $(i = 1, 2)$ félegyenest X_i-ben metszi, akkor a feladat megoldásai ezek az X_i-k és a minimális úthossz $d(P_1', P_2')$. Végezetül, ha $[P_1', P_2'] \cap f_i = \emptyset$ $(i = 1, 2)$, akkor a megoldás $X_1 = A = X_2$.

Megjegyzés. A fenti esetek kirészletezését, valamint az összes lehetőségek tárgyalását hasznos feladatként ajánljuk.

Ha az előzőekben $P_1 = P_2$, akkor az eredmény tovább pontosítható:

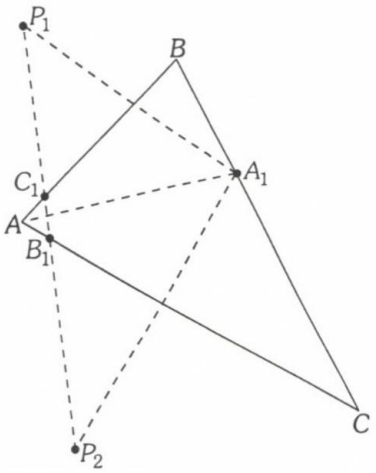
(1.5) *Ha az A közös végpontú f_1 és f_2 félegyenesnek szögmértéke $\hat{A}$ és P a szög belsejében van, akkor az $X_i \in f_i$ $(i = 1, 2)$ feltételekre*

$$\min L[P, X_1, X_2, P] = \begin{cases} 2d(A,P), & \text{ha } \hat{A} \geq \frac{\pi}{2} \text{ (tompaszög)}, \\ 2d(A,P)\sin(\hat{A}), & \text{ha } \hat{A} < \frac{\pi}{2} \text{ (hegyesszög)}, \end{cases}$$



Ha P_iP-nek f_i-re vett szimmetrikusa, akkor f_i szögfelezője a $\widehat{PAP_i}$ szögnek, tehát a $\widehat{P_1AP_2}$ mértéke $2\hat{A}$. Ha $2\hat{A} < \pi$, következik, hogy $[P_1P_2]$ metszi az f_i félegyeneseket a P_i^0 pontokban $(i = 1, 2)$. Ekkor (1.4) alapján a kijelentésben szereplő minimum értéke $L[P, P_1^0, P_2^0, P] = L[P_1, P_2] = d(AP)\sin(\hat{A})$ (az utolsó egyenlőségben felhasználjuk, hogy $\triangle[P_1AP_2]$ egyenlőszárú háromszög és $d(A, P_i) = d(A, P)$. Ha $2\hat{A} \geq \pi$, akkor a minimum feladat megoldása $X_1 = X_2 = A$ és a minimális hossz $2d(A, P)$.

A továbbiakban mindig: egy A, B, C ponthármas által meghatározott háromszög tartományt $\triangle[A, B, C]$-vel jelöljük: a háromszög határát, azaz az $L[A, B, C, A]$ poligonális vonalat $\partial\triangle[A, B, C]$-vel; a háromszög belseje $\triangle^0[A, B, C]$, szögeinek mértéke pedig $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.



Ha (1.5)-ben rögzítünk egy-egy pontot a két félegyenesen, $A \neq B \in f_1$ és $A \neq C \in f_2$ úgy, hogy a $\triangle[A, B, C]$ háromszög hegyesszögű legyen, akkor (1.1) (a) értelmében $\min_{P \in [B,C]} d(A, P) = d(A, A_1)$, ahol A_1 az A pont merőleges vetülete a $[BC]$ szakaszra. Ha az A_1 pont szimmetrikusa $[A, B]$- ill. $[AC]$-re P_1 ill. P_2, akkor legyenek $C_1 \in [A, B]$ ill. $B_1 \in [A, C]$ a $[P_1, P_2]$ metszete a megfelelő szakaszokkal. Ezekre az adatokra nézve (1.5) alapján következik, hogy

$$\min\{L[X_0, X_1, X_2, X_0] \mid X_0 \in [BC], X_1 \in [B, A], X_2 \in [A, C]\} = 2d(A, A_1)\sin(\hat{A}).$$

Az egyenlőség bal oldalán a $\triangle[A, B, C]$ háromszögbe írható legkisebb kerületű háromszög kerülete szerepel. Felcserélve a csúcsok szerepét következik, hogy C_1 a C pont merőleges vetülete $[A, B]$-re míg B_1 a B pontvetülete $[A, B]$-re, azaz $\triangle[A_1, B_1, C_1]$ a $\triangle[A, B, C]$ háromszögnek talpponti háromszöge. Igaz tehát

(1.6) A hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének Fagnano-féle jellemzése. *Egy hegyesszögű háromszögbe írható háromszögek közül a talpponti háromszögnek – és csakis neki – legkisebb a kerülete.*

Kommentár. A tételt G. F. Fagnano (1715–1797) fedezte fel; a fentebb megadott levezetés Fejér Lipót, mára klasszikussá vált, fiatalkori munkája. Tanárának, H. A. Schwarznak egy érdekes bizonyítása [5], 210–212 o.)-ben, valamint [1]-ben található (az utóbbi az egész témakört egy magasabb szempontból részletesen tárgyalja).

Az előző tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $X \in [B, C]$, $Y \in [C, A]$ és $Z \in [A, B]$ feltételekre az $L[X, Y, Z, X] / L[A, B, C, A]$ kerületarány egyetlen minimum helye az $X = A_1$, $Y = B_1$ és $Z = C_1$. A minimum értékének felső becslését tartalmazza a következő tétel:

(1.7) Egy hegyesszögű háromszög és talpponti háromszögének kerületaránya. *Ha $\triangle[A, B, C]$ hegyesszögű háromszög és $\triangle[A_1, B_1, C_1]$ a talpponti háromszöge, akkor*

$$L[A_1, B_1, C_1, A_1] / L[A, B, C, A] = 4\sin\left(\frac{1}{2}\hat{A}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\hat{B}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\hat{C}\right) \leq \frac{1}{2}$$

s az egyenlőség pontosan az $A = B = C$ – azaz a szabályos háromszög – esetén valósul meg.

Bizonyítás. Az (1.6) levezetésekor megadtuk a talpponti háromszög kerületét: $L[A_1, B_1, C_1, A_1] = 2d(A, A_1)\sin\hat{A}$. A magasságot a $d(A, A_1) = d(A, B)\sin\hat{B}$ -vel helyettesítve, majd a szinusz-tételre hivatkozva $d(A, B) = 2R\sin\hat{C}$; végső soron

(a) $L[A_1, B_1, C_1, A_1] = 4R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$.

Úgyszintén a szinusz-tételre hivatkozva egyszerű trigonometrikus átalakításokkal kapjuk, hogy

$$L[A, B, C, A] = d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = 2R(\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}) =$$

$$\text{(b)} \quad = 2R\left(2\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} + 2\sin\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\right) =$$

$$= 4R\cos\frac{\hat{C}}{2}\left(\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} + \sin\frac{\hat{C}}{2}\right) =$$

$$= 8R\cos\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}$$

(felhasználtuk, hogy $\sin\frac{\hat{C}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{C}}{2}\right)$ és $\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} + \cos\left(\frac{\pi-\hat{C}}{2}\right) = 2\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}$. Ha (a)-ban a félszögekre térünk, akkor a megfelelő egyszerűsítésekkel a kijelentésben szereplő egyenlőséget kapjuk.

A felső becslést a következő majorálással igazoljuk: A Pitagorasz-tétel alapján

$$d^2(B, C) = d^2(A, C) + d^2(A, B) - 2d(A, C)d(A, B)\cos\hat{A} \geq 2d(A, C)d(A, B)(1 - \cos\hat{A}) = 4d(A, C)d(A, B)\sin^2\left(\frac{1}{2}\hat{A}\right).$$

A (C, A) és (A, B) párra felírva a megfelelő egyenlőtlenségeket, majd összeszorozva őket, azt kapjuk, hogy:

$$1 \geq 4^3 \cdot \sin^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\hat{C}}{2}\right).$$

Az egyenlőség esetén $d^2(A, C) + d^2(A, B) = 2d(A, C)d(A, B)$, azaz $d(A, B) = d(A, C)$, s a (C, A) párra felírt hasonló egyenlőségből a $d(B, C) = d(B, A)$ adódik.

2. A talpponti háromszöggeometria elemei. A téma igen rövidre fogott ismertetésére bevezetjük a pedál transzformáció fogalmát. E célból $\mathcal{T}^\wedge$ – $\mathcal{T}^\vee$ – ill. $\mathcal{T}^\perp$-sel jelöljük azoknak az (A, B, C) nem-kolineáris ponthármasoknak a halmazát, amelyre a $\triangle[A, B, C]$ háromszög hegyes-, tompa-, ill. derékszögű. Mindegyik $X \in \{A, B, C\}$-re legyen X_1 az X pont merőleges vetülete a másik két pont által meghatározott egyenesre. Ezekkel a jelölésekkel a pedál-transzformáció definíciója:

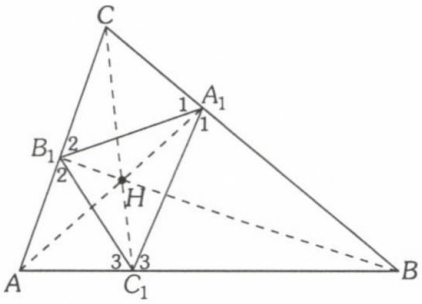
$$P : \mathcal{T}^\wedge \cup \mathcal{T}^\vee \to \mathcal{T}^\wedge \cup \mathcal{T}^\vee \cup \mathcal{T}^\perp :$$
$$(A, B, C) \to P(A, B, C) := (A_1, B_1, C_1)$$

azaz $\triangle[A_1, B_1, C_1]$ a $\triangle[A, B, C]$-nek talpponti háromszöge. Először is tisztázandók

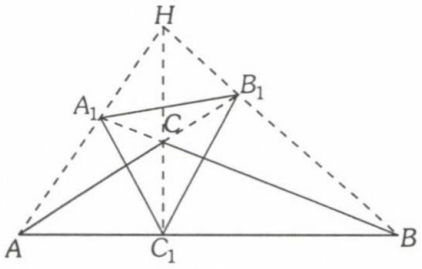
(2.1) A talpponti háromszögek méretei. *Az előző jelöléseket használva: A szögmértékek: (a) $(A, B, C) \in \mathcal{T}^\wedge$ esetén: $\hat{A}_1 = \pi - 2\hat{A}$, $\hat{B}_1 = \pi - 2\hat{B}$ és $\hat{C}_1 = \pi - 2\hat{C}$, és az $[A_1A$, $[B_1B$ ill. $[C_1C$ félegyenesek rendre felezik a $C_1A_1B_1\sphericalangle$, $A_1B_1C_1\sphericalangle$ ill. $B_1C_1A_1\sphericalangle$ szögeket. (b) $(A, B, C) \in \mathcal{T}^\vee$ esetén, ha $\hat{C} > \frac{\pi}{2}$ a tompaszög, akkor: $\hat{A}_1 = 2\hat{A}$, $\hat{B}_1 = 2\hat{B}$ és $\hat{C}_1 = 2\hat{C} - \pi$ s ráadásul $[A_1B$, $[B_1A$ ill. $[C_1C$ felezi a $C_1A_1B_1\sphericalangle$, $A_1B_1C_1\sphericalangle$ ill. $B_1C_1A_1\sphericalangle$ szögeket. Az oldalhosszak. Bármely $X, Y \in \{A, B, C\}$ pontpárra, valamint a fennmaradt Z pontra:*

$$d(X_1, Y_1) = \begin{cases} d(X,Y)\cos\hat{Z}, & \text{ha } \hat{Z} < \frac{\pi}{2}, \\ -d(X,Y)\cos\hat{Z}, & \text{ha } \hat{Z} > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

A bizonyítások a mellékelt ábrákról leolvashatók.



(a)



(b)

A *szögek mértékeit* a $\square[X, Y_1, H, Z_1]$ ($\{X, Y, Z\} = \{A, B, C\}$) húrnégyszögekből számíthatjuk ki. Ha C hegyes ((a) ábra), akkor $\widehat{AC_1B_1} = \hat{C} = \widehat{BC_1A_1}$, ha pedig tompa ((b) ábra), akkor $\widehat{AC_1A_1} = \pi - \hat{C} = \widehat{BC_1B_1}$. Ezek alapján az oldalhosszakat legegyszerűbben a szinusz-tétel segítségével számíthatjuk ki, figyelembe véve, hogy az (A, B, C) ill. (A_1, B_1, C_1) köré írt körök R ill. R_1 sugaraira $R = 2R_1$ (1.(2.4)). Például az (a) esetben: $d(A_1, B_1) = 2R_1\sin\hat{C}_1 = 2R_1\sin(\pi - 2\hat{C}) = R\sin(2\hat{C}) = 2R\sin(\hat{C})\cos(\hat{C})$, míg $d(A, B) = 2R\sin\hat{C}$, tehát $d(A_1, B_1) = d(A, B)\cos(\hat{C})$; a (b) esetben hasonlóan járunk el: $d(A_1, B_1) = -d(A, B)\cos(\hat{C})$.

A szögfelezésre kapott eredmények alapján értelmezhetünk egy olyan $\mathcal{P}^{-1}$-gyel jelölt leképzést, amely (jelölése is szuggerálja!) bizonyos feltételek mellett $\mathcal{P}$-nek inverze. E célra a tetszőleges $(A_1, B_1, C_1) \in \mathcal{T}^\wedge \cup \mathcal{T}^\vee \cup \mathcal{T}^\perp$ ponthalmazra vesszük a $\triangle[A_1, B_1, C_1]$ szögfelezőinek H-val jelölt közös metszéspontját, majd az X_1H ($X_1 \in \{A_1, B_1, C_1\}$) egyenesekre az X_1-ben merőlegeseket húzunk (a szerkesztést a fentebbi (a) ábrán követhetjük). Az így nyert három

egyenes kettőnkénti metszéspontjait olyan sorrendben jelöljük A-, B-, ill. C-vel, hogy $A_1 \in [B, C]$, $B_1 \in [C, A]$ ill. $C_1 \in [A, B]$. Ezekkel a jelölésekkel igaz a következő állítás:

(2.2) *A* $\mathcal{P}^{-1} : \mathcal{T}^{\wedge} \cup \mathcal{T}^{\vee} \cup \mathcal{T}^{\perp} : (A_1, B_1, C_1) \to \mathcal{P}^{-1}(A_1, B_1, C_1) := (A, B, C)$ *képlettel értelmezett leképzés értéke valóban* $\mathcal{T}^{\wedge}$*-ben van és* $\mathcal{P}(A, B, C) = (A_1, B_1, C_1)$.

Bizonyítás. A szögfelezők H metszéspontjában keletkezett három szög mindegyike tompa (mert a $\triangle[A_1, B_1, C_1]$ két szöge félösszegének a kiegészítője), tehát a szerkesztésben megjelenő húrnégyszögek H-val szembeni A, B, ill. C csúcsaiban hegyesszögek lesznek, azaz $(A, B, C) \in \mathcal{T}^{\wedge}$. Az (a) ábrát követve: mivel H a szögfelezők metszéspontja ezért a szerkesztésben szereplő merőlegességek folytán az 1-, 2-, ill. 3-mal jelölt szögpárok egyenlő mértékűek. A három csúcsban megjelenő húrnégyszögeken keresztül ezek a szögmértékek begyűrűznek H-ba, éspedig az 1, 2, 3, 1, 2, 3 sorrendben. Ebből következik, hogy összegük π, ami azt jelenti, hogy egyrészt értékeik rendre megegyeznek az $\hat{A}$, $\hat{B}$, ill. $\hat{C}$ szögmértékkel, másrészt pedig azt, hogy az $\widehat{AHA_1} = \widehat{BHB_1} = \widehat{CHC_1} = \pi$ azaz AA_1, BB_1, ill. CC_1 magasságvonalak, tehát $P(A, B, C) = (A_1, B_1, C_1)$.

A $\mathcal{P}$ és $\mathcal{P}^{-1}$ leképzések kölcsönös viszonyát tisztázzák az alábbi, könnyen ellenőrizhető relációk:

(2.3) *(a) A tetszőleges* $(A_1, B_1, C_1) \in \mathcal{T}^{\wedge} \cup \mathcal{T}^{\vee} \cup \mathcal{T}^{\perp}$*-re legyen* $(A, B, C) = \mathcal{P}^{-1}(A_1, B_1, C_1)$ *és* H *ennek magasságpontja. Ekkor*

$$\mathcal{P}(A, B, C) = \mathcal{P}(H, C, B) = \mathcal{P}(C, H, A) = \mathcal{P}(B, A, H) = (A_1, B_1, C_1)$$

és $\mathcal{P}$ *egyetlen más pontot sem visz* (A_1, B_1, C_1)*-be, azaz* $\mathcal{P}$ *egy 4 : 1 típusú leképezés (minden értéket pontosan négyszer vesz fel). Sajátosan az is következik, hogy* $\mathcal{P} \circ \mathcal{P}^{-1}$ *a* $\mathcal{T}^{\vee} \cup \mathcal{T}^{\perp}$ *halmaz azonossági leképzése, azaz* $\mathcal{P}^{-1}$ $\mathcal{P}$*-nek jobb oldali inverze. (b) Minden* $(A_1, B_1, C_1) \in \mathcal{T}^{\vee} \cup \mathcal{T}^{\perp}$*-re és a megfelelő* H_1 *magasságpontra:*

$$\mathcal{P}^{-1} \circ \mathcal{P}(A_1, B_1, C_1) = \begin{cases} (A_1, B_1, C_1), & \text{ha } (A_1, B_1, C_1) \in \mathcal{T}^{\wedge}, \\ (H_1, C_1, B_1), & \text{ha } \hat{A}_1 > \frac{\pi}{2}, \\ (C_1, H_1, A_1), & \text{ha } \hat{B}_1 > \frac{\pi}{2}, \\ (B_1, A_1, H_1), & \text{ha } \hat{C}_1 > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

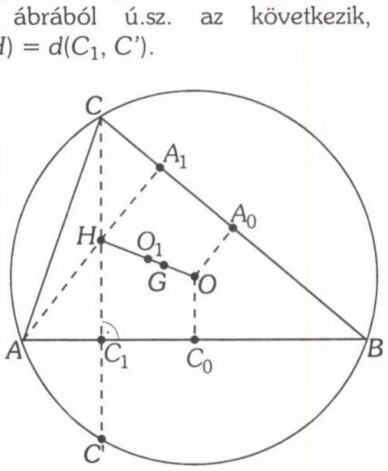
Következik, hogy $\mathcal{P}^{-1} \circ \mathcal{P}$ *csupán a* $\mathcal{T}^{\wedge}$ *halmaz azonossági leképzése.*

A talpponti háromszöggel kapcsolatos legjelentékenyebb alakzat az Euler nevét viselő kör, ill. egyenes. Ezeknek – bárcsak érintőleges – tárgyalása nélkül bármilyen rövidre fogott bevezetés is elképzelhetetlen.

(2.4) Az Euler-kör, illetve -egyenes. Bármely nem-kolineáris (A, B, C) ponthármason egyetlen $C(A, B, C)$-vel jelölt kör halad át; középpontja az $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ szakaszok felezőmerőlegeseinek O-val jelölt metszéspontja; sugarát R-rel, a kört pedig $C(O, R)$-rel is fogjuk jelölni. A megfelelő $\mathcal{P}(A, B, C)$ talppontok által meghatározott $C(\mathcal{P}(A, B, C))$ – a nevezetes Euler-kör. Ennek középpontját és sugarát a következő egyszerű észrevétel alapján határozzuk meg: A CC_1 magasságvonal C' metszete a körrel H-nak AB-re vett tükörképe, hisz (hegyesszög esetén):

$$\widehat{AC'H} = \hat{B} = \frac{\pi}{2} - \hat{C} = \widehat{CHA_1} = \widehat{AHC'}.$$

A tompa $\hat{C}$ szög esetén a megfelelően módosított ábrából ú.sz. az következik, hogy $d(C_1H) = d(C_1, C')$.



Ezek után, ha $\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}$ a H középpontú és $\frac{1}{2}$ arányú hasonlósági leképezés/homotétia, akkor minden $X \in \{A, B, C\}$-re $\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(X') = X_1$. Mivel $C(A, B, C) = C(A', B', C')$ és a homotétiák kört körbe visznek, következik, hogy $C(\mathcal{P}(A, B, C)) = \mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}C((A, B, C))$. A tetszőleges X pontra $\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(X)$ a $[H, X]$ szakasz felező pontja, tehát az Euler-kör $O_1 := \mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(O)$ középpontja a $[H, O]$ szakasz felezőpontja, sugara pedig $R_1 = \frac{1}{2}R$ (ezt használtuk (2.1)-ben). Egyben az is következik, hogy a $[H, A]$, $[H, B]$, $[H, C]$ szakaszok középpontjai ú.sz. az Euler-körön vannak. Végezetül O_1 egyenlő távol van a C_1 és az $[A, B]$-t felező C_0 pontból (hisz merőleges vetülete AB-re a $[C_1, C_0]$ szakasz felezőpontja) s ennek következtében az A_0, B_0, C_0 oldalfelezőpontok ú.sz. az Euler-körön vannak.

Ez utóbbi eredmény újabb perspektívát nyit meg az Euler-kör vizsgálatában, hisz az $[A, A_0]$, $[B, B_0]$, $[C, C_0]$ oldalfelezők közös G metszéspontja mindegyiket 2 : 1 arányban osztja fel, tehát a G középpontú $\mathcal{I}_G$ szimmetriával értelmezett $\mathcal{H}_{G,-\frac{1}{2}} = \mathcal{I}_G \circ \mathcal{H}_{G,\frac{1}{2}}$ inverz-homotétiára $\mathcal{H}_{G,-\frac{1}{2}}(X) = X_0$ (minden $X \in \{A, B, C\}$-re) következésképpen az Euler-kör $C(\mathcal{P}(A, B, C)) = \mathcal{H}_{G,-\frac{1}{2}}(C(A, B, C))$ formában állítható elő, középpontja pedig $O_1 = \mathcal{H}_{G,-\frac{1}{2}}(O)$, azaz G az $[O, O_1]$ szakasz ú.sz. 2 : 1 arányban osztja fel. Ezt összevetve az előzőekkel, következik, hogy az O, G, O_1, H pontok ebben a sorrendben helyezkednek el a közös – ú.sz. Euler nevét viselő – egyenesen ú.h. $d(O, G) = \frac{1}{3}d(O, H)$, míg $d(O, O_1) = \frac{1}{2}d(O, H)$.

3. A pedál transzformáció dinamikája. A tetszőleges $(A_0, B_0, C_0) \in \mathcal{T}^\wedge \cup \mathcal{T}^\vee \cup \mathcal{T}^\perp$ pontharmas $\mathcal{P}$ szerinti pályáján az $(A_n, B_n, C_n) := \mathcal{P}(A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1})$ rekurzióval megszerkesztett sorozatot értjük. Az iteráció elakadásának egyetlen oka az lehet, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$-re $(A_n, B_n, C_n) \in \mathcal{T}^\perp$ (derékszögű); ekkor a kiinduló pontot n-ed rangúnak mondjuk, s ezt írásban az $r(A_0, B_0, C_0) = n$ formában tüntetjük fel; végtelen pálya esetén, definíció szerint $r(A_0, B_0, C_0) = \infty$.

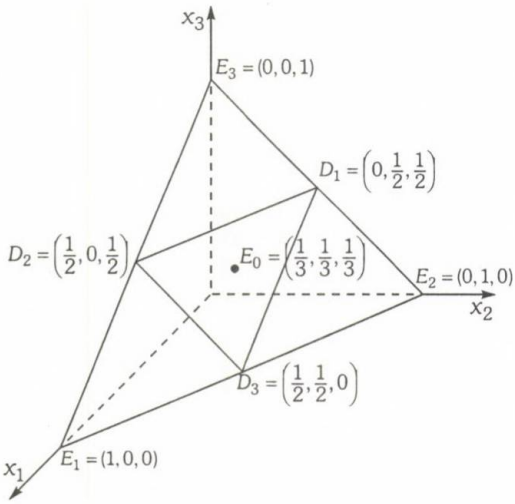
Mivel az (A_n, B_n, C_n) ponthármason áthaladó kör sugara $R_n = \frac{1}{2^n}R_0$ (1.(2.4)) ezért a távolságokra érvényes a $d(X_n, Y_n) \le \frac{1}{2^{n-1}}R_0$ $(X, Y \in \{A, B, C\})$ becslés, tehát a végtelen pályák esetén $d(X_n, Y_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, azaz az $(A_n)_{n=0}^\infty$, $(B_n)_{n=0}^\infty$ és $(C_n)_{n=0}^\infty$ pontsorozatok egymáshoz tartanak, s következésképpen a konvergencia szempontjából hasonlóan viselkednek, de ennek jellemzői még ismeretlenek. Szerencsésebb a helyzet a $\triangle[A_n, B_n, C_n]$ háromszög *alakját* jellemző $(\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n)$ szögmértékkel, s ez azért jelentős, mert a rangot ez határozza meg: $r(A_0, B_0, C_0) = n \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \in \{\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n\}$. A véges pályákat, valamint a végtelen pályák közül azokat, amelyek periodikus alakúak (azaz az $(\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n)_{n=0}^\infty$ sorozat periodikus) először [3]-ban írták le, míg a végtelen, de nemperiodikus alaksorozat ergodikus bonyolultságát P. Lax tisztázta; a továbbiakban ezeket az eredményeket tárgyaljuk.

A talpponti háromszögek méreteire vonatkozó (2.1)-beli összefüggések alapján a szögmértékek sorozatát a következő rekurzió határozza meg:

$$(\hat{A}_{n+1}, \hat{B}_{n+1}, \hat{C}_{n+1}) = \begin{cases} (\pi - 2\hat{A}_n, \pi - 2\hat{B}_n, \pi - 2\hat{C}_n), \text{ ha } (A_n, B_n, C_n) \in \mathcal{T}^\wedge \\ (2\hat{A}_n - \pi, 2\hat{B}_n, 2\hat{C}_n), \text{ ha } (A_n, B_n, C_n) \in \mathcal{T}^\vee \text{ és } \hat{A}_n > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(analóg képletek $\hat{B}_n > \frac{\pi}{2}$ ill. $\hat{C}_n > \frac{\pi}{2}$ esetén). Ennek a rekurziónak kényelmesebb vizsgálatára rátérünk az $x_1 = \frac{\hat{A}}{\pi}$, $x_2 = \frac{\hat{B}}{\pi}$ és $x_3 = \frac{\hat{C}}{\pi}$ ún. normalizált szögmérték hármasra amelyek az: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ és $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ felté-

teleket elégítik ki, s pl. $\hat{A}$ hegyes-, tompa-, ill. derékszögűségét: $x_1 < \frac{1}{2}$, $x_1 > \frac{1}{2}$ ill. $x_1 = \frac{1}{2}$ jellemzi. A fentebbi rekurziós képletek (x_1, x_2, x_3)-ban való felírására szolgál a pedál transzformációnak alább értelmezésre kerülő analitikus megfelelője, amit P-vel fogunk jelölni és (analitikus) pedál transzformációnak nevezünk.



A normalizált szögmérték-hármasok leírására a következő jelöléseket vezetjük be: A valós számhármasok $\mathbb{R}^3$ halmazában a mellékelt ábrán feltüntetett pontokra legyen $\triangle := \triangle[E_1, E_2, E_3]$, $\triangle_0 := [D_1, D_2, D_3]$, $\triangle_1 := \triangle[E_1, D_3, D_2]$, $\triangle_2 := \triangle[E_2, D_1, D_3]$ és $\triangle_3 := \triangle[E_3, D_2, D_1]$.

Egy $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ középpontú és $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ arányú $H_{A,\alpha}$ hasonlósági transzformáció, értelmezés szerint az $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ pontban az

$$X' := H_{A,\alpha}(X) := A + \alpha(X - A) =$$
$$= (1 - \alpha)A + \alpha X = ((1 - \alpha)a_1 + \alpha x_1,$$
$$(1 - \alpha)a_2 + \alpha x_2, (1 - \alpha)a_3 + \alpha x_3)$$

értéket veszi fel. Az A pont helyben marad, míg $X \neq A$ esetén X' az AX egyenesen van (A-hoz viszonyítva: $\alpha > 0$-ra X-szel azonos, míg $\alpha < 0$-ra ellentétes oldalon) és a távolságarányokra $d(X', A) = |\alpha| d(X, A)$. A $H_{A,\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképzés kölcsönösen egyértelmű, távolság – és szögmértéktartó, inverze pedig $H_{A,\alpha^{-1}}$.

Világos, hogy az E_i $(0 \leq i \leq 3)$ középpontú és $i = 0$-ra -2 míg $i = 1, 2, 3$-ra $+2$ arányú homotétia $\triangle_i$-t az egész $\triangle$-ra képezi le: $\triangle = H_{E_0,-2}(\triangle_0) = H_{E,2}(\triangle_i)$ $(1 \leq i \leq 3)$. Ezeknek az „összeragasztásával" képezzük

(3.1) A pedál transzformációt.

$$P : \triangle \to \triangle : X \to P(X) :=$$
$$:= \begin{cases} H_{E_0,-2}(X), & \text{ha } X \in \overset{0}{\triangle}_0 \\ H_{E_i,2}(X), & \text{ha } X \in \triangle_i \ (1 \leq i \leq 3) \end{cases}$$

$$\overset{(**)}{=} \begin{cases} (1-2x_1, 1-2x_2, 1-2x_3), & \text{ha } X = (x_1, x_2, x_3) \in \overset{0}{\triangle}_0 \\ (2x_1 - 1, 2x_2, 2x_3), & \text{ha } X \in \triangle_1 \\ (2x_1, 2x_2 - 1, 2x_3), & \text{ha } X \in \triangle_2 \\ (2x_1, 2x_2, 2x_3 - 1), & \text{ha } X \in \triangle_3. \end{cases}$$

Megjegyzés: Az $X = (x_1, x_2, x_3)$ pontnak megfelelő $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) := (\pi x_1, \pi x_2, \pi x_3)$ szögmérték hármas $X \in \overset{0}{\triangle}_0$ esetén hegyes, míg $X \in \triangle_1$, $\triangle_2$ ill. $\triangle_3$-ra, rendre A-, B-, ill. C-ben tompa, a pedál transzformáció pedig pontosan a szögekre megadott rekurziót írja le.

A transzformáció kifejtése jobban kezelhető egységes alakra hozható az alábbi szignatúra függvénnyel, amelyben $\operatorname{sgn}(t) = -1, 0, 1$, ha $t < =, > 0$): $\sigma : \triangle \to \{-1, 0, 1\} : X \to \sigma(X) :=$
$:= \operatorname{sgn} x_1\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) x_2\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) x_3\left(x_3 - \frac{1}{2}\right) = -1, 1$

ill. 0 annak megfelelően, hogy $X \in \overset{0}{\triangle}_0$, $X \in \triangle_i$ ill. $X \in \partial\triangle_i$ $(i = 1, 2, 3)$ A nulla szignatúrájú pontokat (azaz a $\triangle_i$ $(0 \leq i \leq 3)$ határpontjait) degeneráltaknak nevezzük; ezeket leszámítva megadható

(3.2.) A pedál transzformáció kifejtése a törtrész függvénnyel. Ha $X = (x_1, x_2, x_3) \in \triangle$ és $\sigma(X) \neq 0$, *akkor*

$$P(x_1, x_2, x_3) = (\{2\sigma(X)x_1\}, \{2\sigma(X)x_2\}, \{2\sigma(X)x_3\}).$$

Bizonyítás. Ha $X \in \overset{0}{\triangle}_0$, akkor $0 \leq x_k \leq \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2, 3)$ tehát $\sigma(X) = -1$ és $\{-2x_k\} = -2x_k - [-2x_k] = -2x_k + 1$, tehát a képlet megfelel a (3.1)-ben megadott értéknek.

Ha $X \in \triangle_1$, akkor $\sigma(X) \neq 0$ folytán: $x > \frac{1}{2}$ és $x_2, x_3 < \frac{1}{2}$. Ekkor $\sigma(X) = 1$ és $\{2x_1\} = 2x_1 -$

$-[2x_1] = 2x_1 - 1$, míg $k = 2, 3$-ra $\{2x_k\} = 2x_k$, azaz a képlet ismét megfelel a (3.1)-beli definíciónak.

A további célunk a pontok pályáinak elemzése: az $X \in \triangle$ pont P szerinti pályája az az $X_n \in \triangle$ ($n \in \mathbb{N}$) pontsorozat amelyben $X_0 = X$ és $X_n := P(X_{n-1})$ ($n \geq 1$). A pálya elemei kifejezhetők az X_0 kezdeti érték, valamint P iteráltjai segítségével, éspedig: ha $P^0 := 1_\triangle$ (a $\triangle$ halmaz azonossági leképzése) és $P^n := P \circ P^{n-1}$ ($n \geq 1$), akkor $X_n = P^n(X_0)$ ($n \geq 0$). Végezetül a szignatúra függvényt is kiterjesztjük a pályákra:

$$\sigma_n(X) := \sigma(X)\,\sigma(P(X))\ldots\sigma(P^{n-1}(X)) = \\ = \sigma(X_0)\sigma(X_1)\ldots\sigma(X_{n-1}) \quad (n \geq 1),$$

s ennek segítségével tömören leírjuk a P transzformáció iteráltjait:

(3.3) *Ha* $X = (x_1, x_2, x_3) \in \triangle$ *és* $1 \leq n$*-re:* $\sigma_n(X) \neq 0$, *akkor*

$$P^n(x_1, x_2, x_3) = \\ = (\{2^n\sigma_n(X)x_1\}, \{2^n\sigma_n(X)x_2\}, \{2^n\sigma_n(X)x_3\})$$

Bizonyítás (n szerinti indukcióval). Az $n = 1$ esetben a képlet megegyezik a (3.2)-belivel (hisz $\sigma_1(X) = \sigma(X)$). Ha az állítás n-re igaz, és $\sigma_{n+1}(X) = \sigma(X_0)\ldots\sigma(X_n) = \sigma_n(X)\sigma(X_n) \neq 0$, akkor $\sigma(X_n) = \sigma(P^n(X)) \neq 0$ és $\sigma_n(X) \neq 0$, tehát a $P^{n+1} = P \circ P^n$ rekurzió alapján (a jobb áttekinthetőségért, csak az első koordinátát írjuk ki):

$$P^{n+1}(x_1, x_2, x_3) = P(P^n(x_1, x_2, x_3)) = \\ = P(\{\{2^n\sigma_n(X)x_1\}\ldots) \overset{(3.2)}{=} \\ = (\{2\sigma(P^n(X)\{2^n\sigma_n(X)x_1\}\}\ldots) \overset{(4.2)}{=} \\ = (\{2^{n+1}\sigma_n(X)x_1\},\ldots),$$

azaz az állítás $(n + 1)$-re is igaz.

A degenerálódó pályák jellemzésére minden $X \in \triangle$ ponthoz egy „rang" számot rendelünk:

$$rang(X) = \begin{cases} \min\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \sigma(P^n(X)) = 0\}, \text{ ha létezik ilyen } n; \\ \infty, \text{ ha minden } n \in \mathbb{N}\text{-re } \sigma(P^n(X)) \neq 0. \end{cases}$$

A nulla rangúak a fentebb említett degenerált pontok, az n-ed rangúak pedig n lépésben degenerálódnak. A (3.3) segítségével a véges rangú pontok alábbi szép jellemzését kapjuk:

(3.4) *Ha* $X = (x_1, x_2, x_3) \in \overset{0}{\triangle}$ (*azaz* $0 < x_i < 1$, $i = 1, 2, 3$) *akkor*

$$rang(X) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \{1, 2, 3\} \wedge k \in \mathbb{N} : \\ x_i = (2k + 1)/2^{m+1}\}.$$

(a jobb oldalon az üres halmaz minimumán a ∞*-t értjük).*

Bizonyítás. $r(X)$-szel jelölve a jobb oldalt, n szerinti indukcióval igazoljuk, hogy:

$$rang(X) = n \Leftrightarrow r(X) = n.$$

$n = 0$: $rang(X) = 0$ azt jelenti, hogy $\sigma(X) = 0$, azaz valamelyik $i \in \{1, 2, 3\}$-ra: $x_i\left(x_i - \frac{1}{2}\right) = 0$. Mivel $0 < x_i < 1$, következik, hogy $x_i = \frac{1}{2}$, azaz az $m = 0$ és $k = 0$ választás megfelel az $r(X)$ definíciójának, s így $r(X) = 0$. Megfordítva, ha $r(X) = 0$, akkor $x_i = (2k + 1)/2$, tehát $0 < x_i < 1$ következtében $k = 0$ s ebből kifolyólag $\sigma(X) = 0$.

Feltesszük, hogy az állítás 0, 1,..., $(n - 1)$-re igaz. Ha $rang(X) = n$, akkor $\sigma(P^{n-1}(X)) \neq 0 = \\ = \sigma(P^n(X))$ és $P^n(X)$ a (3.3)-as alakban írható fel. A szignatúra eltűnése jelenti, hogy valamelyik $i \in \{1, 2, 3\}$-ra $\{2^n\sigma_n(X)x_i\} = 0$ vagy $\frac{1}{2}$. Az első eset kizárt, hisz ekkor a szóban forgó szám egész volna, azaz valamely $\ell \in \mathbb{N}$-re $x_i = \frac{\ell}{2^n}$. Ez esetben az esetleges közös tényezőkkel való egyszerűsítés után $x_i = \frac{2k+1}{2^m}$, $m \leq n$ s ez az $r(X) \leq m - 1 < n$ egyenlőtlenséget vonná maga után, s az indukciós hipotézis alapján a $rang(X) < n$ ellentmondáshoz vezetne. A fent maradt $\frac{1}{2}$ esetén: $2^n\sigma_n(X)x_i - \frac{1}{2} := K \in \mathbb{Z}$, tehát létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $x_i = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$, s így értelmezés szerint $r(X) \leq n$. A szigorú egyenlőtlenség azért kizárt, mert akkor az indukciós hipotézis alapján a $rang(X) < n$ ellentmondáshoz jutnánk.

Megfordítva, ha $r(X) = n$, akkor egyrészt az értelmezés alapján valamely i-re $x_i = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$, másrészt pedig az indukció hipotézis értelmé-

ben a $rang(X) < n$ kizárt. Ez utóbbi alapján használhatjuk a (3.3)-as reprezentációt, amelyben $\{2^n\sigma_n(X)x_i\} = \{\sigma_n(x)(2k+1)/2\} = 1/2$ s következésképpen $\sigma(P^n(X)) = 0$, azaz $rang(X) \le 0$. Mivel a szigorú egyenlőtlenség kizárt, következik, hogy $rang(X) = n$.

A rang most megadott jellemzésével tisztázzuk a racionális koordinátájú pontok rangját. Ha $x_i = \frac{r_i}{s_i} \in \mathbb{Q}$ $(i = 1, 2, 3)$ akkor $s = s_1s_2s_3$-ra bővítve a közös nevezőjű $x_i = \frac{t_i}{s}$ reprezentálásra térhetünk, majd a (t_1, t_2, t_3, s) legnagyobb közös osztóval egyszerűsítve, olyan $x_i = \frac{p_i}{q}$ reprezentáláshoz jutunk, amelyben $(p_1, p_2, p_3, q) = 1$.

(3.5) A racionális koordinátájú pontok rangja. *Legyen* $X = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \frac{p_3}{q}\right) \in \triangle$ *és* $q = 2^n(2m+1) \ne 1$. *Ekkor*

(a) $q = 2^n$, *azaz* $n \ne 0 = m$ *esetén:* $rang(X) < n$;

(b) $q = 2m+1$, *azaz* $n = 0 \ne m$ *esetén:* $rang(X) = \infty$;

(c) $q = 2^n(2^{m+1})$ *és* $n \ne 0 \ne m$ *esetén:*

$$rang(X)\begin{cases} < n, & \text{ha } 2m+1 \text{ osztja egyik } p_i - t; \\ \infty, & \text{máskülönben.} \end{cases}$$

Bizonyítás. (a) Ha $p_i = 2^{n_i}(2m_i+1)$ akkor $k_i = n - n_i - 1$-re $2^{k+1}x_i = 2m_i + 1$. Kizárt, hogy minden $k_i < 0$ – hisz akkor minden i-re $n \le n_i$ volna s az $1 = (p_1 + p_2 + p_3)/q \ge 3$ ellentmondáshoz jutnánk. Ha $k_i \ge 0$, akkor (3.4) értelmében $rang(X) \le k_i = n - n_i - 1 \le n - 1 < n$.

(b) Ha $2^{k+1}x_i = 2\ell + 1$, akkor a $2^{k+1}p_i = (2\ell+1)(2m+1)$ ellentmondáshoz jutunk, tehát nincs olyan $i \in \{1, 2, 3\}$ és $k \in \mathbb{N}$ amelyre $2^{k+1}x_i$ páratlan, tehát (3.4) értelmében $rang(X) = \infty$.

(c) Ha $r := rang(X) < \infty$, akkor (3.4) alapján valamelyik $i \in \{1, 2, 3\}$-ra van olyan $\ell \in \mathbb{N}$, amelyre $2^{r+1}x_i = 2\ell + 1$, azaz $2^{r-n-1}p_i = (2\ell+1)(2m+1)$, tehát $2m+1$ osztja p_i-t és $r \le n - 1$. Megfordítva, ha $p_i = 2^{n_i}(2m_i+1)$ $(2m+1)$, akkor $2^{n-n_i}x_i = 2m_i + 1$. Az $n \le n_i$ egyenlőség esetén $x_i = 2^{n_i-n}(2m_i+1) \ge 1$ tehát $X = E_i$ *és* $rang(X) = 0$. Ha pedig $n > n_i$, akkor (3.4) alapján $rang(X) \le n - n_i - 1$.

(3.6) A periodikus pontok. *A tetszőleges* $n \in \mathbb{N}^*$*-ra P-nek* $\mathring{\triangle}$*-beli n periodikus pontjai, azaz a* $P^n(X) = X$, $X \in \mathring{\triangle}$, *egyenlet megoldásai pontosan az*

$$X = \left(\frac{p_1}{2^n - \varepsilon}, \frac{p_2}{2^n - \varepsilon}, \frac{p_3}{2^n - \varepsilon}\right)$$

alakú pontok, amelyben $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $p_i \in \mathbb{N}^*$ *és* $p_1 + p_2 + p_3 = 2^n - \varepsilon$. *Ha ráadásul* $(p_1, p_2, p_3, 2^n - \varepsilon) = 1$, *akkor minden* $0 < m < n$*-re* $P^m(X) \ne X$, *azaz n X-nek főperiódusa.*

Bizonyítás. k szerinti indukcióval $P^n(X) = X$-ből $P^{kn}(X) = X$ $(k \in \mathbb{N})$ következik.

A második észrevétel az, hogy $P^n(X) = X \in \mathring{\triangle}$ esetén $rang(X) = \infty$, (tehát a (3.3)-beli reprezentálás minden kitevőre érvényes). Valóban, véges rang esetén minden $m > rang(X)$-re $P^m(X) \in \triangle \setminus \mathring{\triangle}$ tehát alkalmasan nagy k-ra $kn > rang(X)$ s ezzel a $\mathring{\triangle} \ni X = P^{kn}(X) \in \triangle \setminus \mathring{\triangle}$ ellentmondáshoz jutunk.

Az $(\cdot, x_i, \cdot) = X = P^n(X) \overset{(3.3)}{=} (\cdot, \{2^n\sigma_n(X)x_i\}, \cdot)$ egyenlőségből $x_i = 2^n\sigma_n(X)x_i - [2^n\sigma_n(X)x_i]$ $(1 \le i \le 3)$ következik, tehát a $p_i := [2^n\sigma_n(X)x_i]\sigma(X) \in \mathbb{N}$ számokra $x_i = p_i/(2^n - \sigma_n(X))$ és $\sigma_n(X) \in \{-1, 1\}$. Ezzel igazoltuk, hogy a periodikus pontok a megadott alakúak.

Megfordítva, ha $x_i = p_i/(2^n - \varepsilon)$, $p_i \in \mathbb{N}$ és $p_1 + p_2 + p_3 = 2^n - varepsilon$, akkor (3.5) (b) alapján $rang(X) = \infty$, tehát (3.3) értelmében $P^n(X)$ i-ik koordinátája $\left\{2^n\sigma_n(X)\frac{p_i}{2^n - \varepsilon}\right\} =$

$$= \left\{\sigma_n(X)p_i + \varepsilon\sigma_n(X)\frac{p_i}{2^n - \varepsilon}\right\} = \left\{\varepsilon\sigma_n(X)\frac{p_i}{2^n - \varepsilon}\right\} =$$

$$\begin{cases} p_i/(2^n - \varepsilon), & \text{ha } \varepsilon\sigma_n(X) = 1 \\ 1 - p_i/(2^n - \varepsilon), & \text{ha } \varepsilon\sigma(X) = -1. \end{cases}$$

Az első esetben az eredmény pont x_i, azaz $P^n(X) = X$; a második eset pedig kizárt, mert a koordináták összege 1 helyett 2 volna.

Befejezésül azt igazoljuk, hogyha X legkisebb ún. főperiódusa (m) kisebb mint n, akkor $(p_1, p_2, p_3, 2^n - \varepsilon) > 1$. E célból megismételve a fentebbi gondolatmenetet $P^m(X) = X$-re az X pontnak egy $X = \left(\frac{q_1}{2^m - \delta}, \frac{q_2}{2^m - \delta}, \frac{q_3}{2^m - \delta}\right)$ $(\delta \in \{-1, 1\})$ alakú előállítását kapjuk, azaz (*) $(2^n - \varepsilon)q_i = (2^m - \delta)p_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Ha $u = (2^m - \delta, 2^n - \varepsilon)$ a legnagyobb közös osztó és $2^m - \delta = uv$ ill. $2^n - \varepsilon = uw$, akkor $(v, w) = 1$ és ráadásul $w > 1$ mert a főperiódus osztója minden periódusnak, s ezért $n = km$, tehát $2^n - \varepsilon$ nem lehet a $2^m - \delta$ szám osztója. Ezek után visszahelyettesítve a (*) egyenlőségbe azt kapjuk, hogy $q_i w = p_i v$, s mivel v és w relatív prímek, ezért w valódi osztója minden p_i-nek és persze $2^m - \varepsilon$-nek is, azaz $(p_1, p_2, p_3, 2^n - \varepsilon) \geq w > 1$.

A Függelékben [3]-ból átvett (4.8)-as osztható kritérium segítségével kimutatjuk, hogy minden végtelen rangú és racionális koordinátájú pont pályája végül is periodikus.

(3.7) *Ha* $X = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \frac{p_3}{q}\right) \in \mathring{\triangle}$ *és* $q = 2^n(2m + 1)$ *valamint* $k = \frac{1}{2}\varphi(2m+1)$, *akkor*

(a) $n = 0 \neq m$ esetén X k periódusú pont;

(b) $n \neq 0 \neq m$ esetén, ha $2m + 1$ nem osztja egyik p_i sem, akkor a $P^n(X)$ pont k periódusú.

Bizonyítás. (a) A már idézett (4.8) tétel értelmében nem ± 1 egyik értékére, amit ε-nal fogunk jelölni, $2^k - 1$ osztható $(2m + 1)$-gyel. Ha $2^k - \varepsilon = (2m + 1)p$, akkor $X = \left(\frac{p_1 p}{2^k - \varepsilon}, \frac{p_2 p}{2^k - \varepsilon}, \frac{p_3 p}{2^k - \varepsilon}\right)$ tehát (3.6) értelmében k periódusú.

(b) Az adott feltételek mellett X végtelen rangú, tehát $P^n(X)$ i-ik koordinátája

$$\left\{2^n \sigma_n(X) \frac{p_i}{2^n(2m+1)}\right\} = \begin{cases} \frac{p_i}{2m+1}, & \text{ha } \sigma_n(X) = 1, \\ 1 - \frac{p_i}{2m+1} = \frac{2m + p_i + 1}{2m+1}, & \text{ha } \sigma_n(X) = -1, \end{cases}$$

tehát mindkét eset az (a) hatáskörébe tartozik.

Megjegyzés. A $\sigma_n(X) = -1$ eset csakis $n = 1$-re léphet fel – erről a koordináták összegzésével győződhetünk meg: $1 = \sum_{i=1}^{3}\left(1 - \frac{p_i}{2m+1}\right) = 3 - \frac{2^n(2m+1)}{2m+1} = 3 - 2^n$.

Ezzel, a csupa racionális koordinátájú pontok (pályák) viselkedése teljesen tisztázott; jelentőségük számottevő, hisz tartalmazzák az összes periodikus pontokat, de ua. számszerűségükben elenyészően kevesen vannak, s a többiekről – a tömeges viselkedésről – eleddig semmilyen információnk nincsen s '90-ig P. Lax ([4]) vizsgálódásáig – senkinek sem volt. A hozzájuk vezető út a pedál transzformációnak egy globális tulajdonságán, az ergodicitáson keresztül vezet. Az ergodicitás témaköre elsődleges fontosságú a statisztikus fizika megalapozásában, s belőle a '30-as években a matematikának új ága – az ergodelmélet született (amelyben magyar (származású) kutatók: Neumann János, Riesz Frigyes, Szász Domokos döntő eredményeket értek el (l. [9])).

A továbbiakban a T értelmezésben szereplő homotétiak inverzeire bevezetjük a $T_i : \triangle \to \triangle_i$ $(0 \leq i \leq 3)$ jelöléseket, amelyben $T_0(X) = H_{E_0, -\frac{1}{2}}(X)$ és $1 \leq i \leq 3$-ra: $T_i(X) = H_{E_i, -\frac{1}{2}}(X)$. Világos, hogy minden $X \in \triangle$-re a $T(Y) = X$ egyenlet ($\triangle$-beli) megoldásai pontosan a $T_i(X)$ $(0 \leq i \leq 3)$ pontok, tehát bármely $\mathcal{H} \subset \triangle$ halmaz T szerinti $T^{-1}(\mathcal{H}) := \{X \in \triangle \mid T(Y) \in \mathcal{H}\}$ viszont képe felírható mint $T^{-1}(\mathcal{H}) = T_0(\mathcal{H}) \cup \cup T_1(\mathcal{H}) \cup T_2(\mathcal{H}) \cup T_3(\mathcal{H})$ és a jobb oldali tagok kettőnként diszjunktak. Ennek alapján, ha m-mel jelöljük a szokásos síkbeli (Lebesgue-féle) mértéket, akkor $m(T^{-1}(\mathcal{H})) = \sum_{i=0}^{3} m(T_i(\mathcal{H}))$, s mivel a T_i homotétiák $\frac{1}{2}$ arányúak, ezért $m(T_i(\mathcal{H})) = \frac{1}{4}m(\mathcal{H})$, tehát a területekre:

(3.8) A pedál transzformáció mértéktartó, *abban az értelemben, hogy minden mérhető* $\mathcal{H} \subset \triangle$ *halmazra:* $m(T^{-1}(\mathcal{H})) = m(\mathcal{H})$.

A transzformáció lokális elemzésére szolgál

(3.9) $\triangle$ **Standard felbontás sorozata:** $\triangle$ elsőrendű felbontása; $\triangle = \triangle_0 \cup \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \cup \triangle_3 = T_0(\triangle) \cup T_1(\triangle) \cup T_2(\triangle) \cup T_3(\triangle)$. Ha minden $i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1, 2, 3\}$-ra értelmezettek a $\triangle_{i_1 \ldots i_n}$ háromszögek, akkor bármely $i_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3\}$-ra legyen.

$$\triangle_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}} := T_{i_{n+1}}(\triangle_{i_1 \ldots i_n}).$$

Ezekre nézve igazak az alábbi állítások:

(i) $\triangle_{i_1 \ldots i_n} \subset \triangle_{i_k \ldots i_n}$, *bármely* $1 \le k \le n$*-re;*

(ii) *minden rögzített* $1 \le n \in \mathbb{N}$*-re:* $\triangle = \cup\left\{\triangle_{i_1 \ldots i_n} \mid i_1, \ldots, i_n \in \{0,1,2,3\}\right\}$ *s ebben az n-ed rendűnek nevezett a felbontásban szereplő háromszögek kettőnként diszjunktak.*

(iii) $m\left(\triangle_{i_1 \ldots i_n}\right) = \frac{m(\triangle)}{4^n}$ *és* $\triangle_{i_1 \ldots i_n}$ *átmérője* $\frac{1}{2^n}$*-ed része* $\triangle$ *átmérőjének.*

Bizonyítás. (i) $k = 1$-re világos, s ha egy $k < n$-re minden $n - 1$ hosszúságú index sorozatra igaz, akkor $\triangle_{i_1 \ldots i_n} = T_{i_n}\left(\triangle_{i_k \ldots i_{n-1}}\right) \subset T_{i_n}\left(\triangle_{i_k \ldots i_{n-1}}\right) = \triangle_{i_k \ldots i_n}$.

(ii) Az állítás $n = 1$-re igaz, s ha igaz egy tetszőleges n-re, akkor $(n + 1)$-re is az. E célból csoportosítjuk a $\triangle_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}$ elemeket az utolsó index rögzítésével; ha $i_{n+1} = i \in \{0, 1, 2, 3\}$, akkor

$$\cup\left\{\triangle_{i_1 \ldots i_n i} \mid i_1, \ldots, i_m \in \{0,1,2,3\}\right\} =$$

$$= \cup\left\{T_i\left(\triangle_{i_1 \ldots i_n}\right) \mid i_1, \ldots, i_n \in \{0,1,2,3\}\right\} =$$

$$= T_i\left(\cup\left\{\triangle_{i_1 \ldots i_n} \mid i_1, \ldots, i_n \in \{0,1,2,3\}\right\}\right) = T_i(\triangle) = \triangle_i$$

(az utolsó előtti egyenlőségben az indukciós hipotézist használtuk). Ezeket a részeredményeket egyesítve i mind a négy értékére azt kapjuk, hogy az $(n + 1)$-ed rendű felbontás elemeinek az egyesítése $\triangle$.

(iii) Szintén n szerinti indukcióval okoskodunk, felhasználva, hogy a T_i leképzések a mértéket $\frac{1}{4}$-re csökkentik. Ezek szerint: $m(\triangle_i) = m(T_i(\triangle)) = \frac{1}{4} m(\triangle)$, s ha az állítás n-re igaz akkor $(n + 1)$-re is, mert: $m(\triangle_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}) = m(T_{i_{n+1}}(\triangle_{i_1 \ldots i_n})) = \frac{1}{4} m(\triangle_{i_1 \ldots i_n}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^n} m(\triangle)$.

Minden leképzés esetünkben a T dinamikájának a vizsgálatában kulcsszerepet játszanak a $T^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ feltétellel értelmezett, (T–) invariánsnak nevezett halmazok. A feltétel ekvivalens a: $T^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ és $T(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ együttessel, ami azt jelenti, hogy T: sem $\mathcal{H}$-ba kívülről, sem $\mathcal{H}$-ból ki nem visz egyetlen pontot sem. T ergodicitásának első megközelítése:

(3.10) Az invariáns halmazok mindenüttsége. *Ha a* $\mathcal{H} \subset \triangle$ *halmaz mérhető és* T *invariáns, akkor:*

(i) *a standard felbontás minden elemére:* $\frac{m(\mathcal{H} \cap \triangle_{i_1 \ldots i_n})}{m(\triangle_{i_1 \ldots i_n})} = \frac{m(\mathcal{H})}{m(\triangle)}$, *azaz az* $m(\mathcal{H})/m(\triangle)$ *mértékarány a felbontás minden elemére átöröklődik;*

(ii) *azonos állítás bármely* $\mathcal{R} \subset \triangle$ *négyzetre:* $\frac{m(\mathcal{H} \cap \mathcal{R})}{m(\mathcal{R})} = \frac{m(\mathcal{H})}{m(\triangle)}$.

Bizonyítás. (i) Az n szerinti igazolás főeleme a minden T invariáns halmazra érvényes: $\mathcal{H} \cap \triangle_i = T_i(\mathcal{H})$ ill. $\mathcal{H} \cap \triangle_{i_1 \ldots i_n} = T_i \cap (\mathcal{H} \cap \triangle_{i_1 \ldots i_{n-1}})$. Ennek alapján

- $n = 1$-re:

$$\frac{m(\mathcal{H} \cap \triangle_i)}{m(\triangle_i)} = \frac{m(T_i(\mathcal{H}))}{m(T_i(\triangle))} = \frac{1}{4} m\left(\frac{\mathcal{H}}{\frac{1}{4} m(\triangle)}\right).$$

- n esetét $(n - 1)$-re vezetjük vissza:

$$\frac{m(\mathcal{H} \cap \triangle_{i_1 \ldots i_n})}{m(\triangle_{i_1 \ldots i_n})} = \frac{m(T_{i_n}(\mathcal{H} \cap \triangle_{i_1 \ldots i_{n-1}}))}{T_{i_n}(\triangle_{i_1 \ldots i_{n-1}})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} m(\mathcal{H} \cap \triangle_{i_1 \ldots i_{n-1}})}{\frac{1}{4} m(\triangle_{i_1 \ldots i_{n-1}})}.$$

(ii) A (3.9) (ii) alapján minden n-re vesszük az n-ik felbontásnak azokat az elemeit, amelyek

$\mathcal{R}$-ben vannak, ill. nem üresen metszik $\mathcal{R}$-t s ezek egyesítését $\mathcal{I}_n$- ill. $\mathcal{E}_n$-nel jelöljük. Ekkor $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{E}_n$, s így a mérték monotonitásából:

$$m(\mathcal{I}_n) \le m(\mathcal{R}) \le m(\mathcal{E}_n) \text{ ill.}$$
$$m(\mathcal{I}_n \cap \mathcal{H}) \le m(\mathcal{R} \cap \mathcal{H}) \le m(\mathcal{E}_n \cap \mathcal{H}).$$

Az idézett tétel (iii) pontjából következik, hogy $n \to \infty$-re: $m(\mathcal{I}_n) \to m(\mathcal{R})$ és $m(\mathcal{E}_n) \to m(\mathcal{R})$; a második egyenlőtlenségben pedig a két szélet tagokra bontva alkalmazzuk (i)-t, miszerint $\frac{m(\mathcal{H})}{m(\triangle)} m(\mathcal{I}_n) \le m(\mathcal{R} \cap \mathcal{H}) \le \frac{m(\mathcal{H})}{m(\triangle)} m(\mathcal{E}_n)$, tehát határátmenettel az (ii)-beli egyenlőséget kapjuk.

Eleddig kizárólag elemi eszközöket használtunk, de az összegző záró lépésben elkerülhetetlen két igen mély eredmény bevetése. Az első: Lebesgue Sűrűség-tétele, miszerint, ha $\mathcal{R}(X, r)$ az X középpontú és r oldalhosszú négyzet, akkor mérhető $\mathcal{H}$ halmaznak egy nulla mértékű $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ részhalmazán kívül, minden $X \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$-re létezik az alábbi határérték, és az értéke 1:

$$\lim_{r \to 0} \frac{m(\mathcal{H} \cap \mathcal{R}(X, r))}{m(\mathcal{R}(X, r))} = 1.$$

Ezt összevetve a fentebb bizonyított (ii)-beli eredménnyel, két eshetőség van: vagy $\mathcal{N} = \mathcal{H}$, azaz $m(\mathcal{H}) = 0$, vagy ha nem, akkor $\frac{m(\mathcal{H})}{m(\triangle)} = 1$.

Ezzel igazoltuk

(3.11) A pedál transzformáció ergodicitását, *amely értelmezés szerint azt jelenti, hogy minden mérhető és T invariáns halmaz mértéke vagy 0 vagy $m(\triangle)$.*

G. D. Birkhoff nevezetes Individuális Ergodtétele az ergodicitást a pályákkal jellemzi. E célból ha $\mathcal{H} \subset \triangle$ egy tetszőleges mérhető halmaz, $X \in \triangle$ és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor $\mathcal{N}(X, \mathcal{H}, n)$-nel jelöljük azoknak az X, $T(X)$, ..., $T^{n-1}(X)$ pontoknak a számát amelyek $\mathcal{H}$-ban vannak, azaz $\frac{1}{n} N(X, \mathcal{H}, n))$ az X, $T(X)$, ..., $T^{n-1}(X)$ sorozat gyakorisága $\mathcal{H}$-ban. A szóban forgó tétel azt mondja ki, hogy egy mértéktartó T leképzés pontosan akkor ergodikus, ha minden mérhető $\mathcal{H}$ halmazra létezik egy olyan nulla mértékű $\mathcal{N} \subset \triangle$ halmaz, amelyen kívül minden $X \in \triangle \setminus \mathcal{N}$-re létezik az alábbi határérték, és fennáll az egyenlőség:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(X, \mathcal{H}, n)}{n} = \frac{m(\mathcal{H})}{m(\triangle)},$$

ami azt jelenti, hogy X T szerinti pályája egyenlő eloszlású $\triangle$-ban.

Visszatérve az alaptémára, a végeredmény az, hogy egy nulla mértékű halmazt leszámítva, azaz majdnem minden háromszög talpponti háromszögeinek a sorozata az összes lehetséges alakok halmazában egyenlő eloszlású.

Függelék (a) az egész, ill. törtrész. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám egészrésze $[a] := \max\{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge n \le a\}$ – az a-nál kisebb egész számok legnagyobbika, törtrésze pedig $\{a\} := a - [a]$. A definícióból azonnal következik, hogy

(4.1) $\{a + n\} = \{a\}$ $(\forall a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z})$;
ebből pedig könnyen levezethető, hogy

(4.2) $\{m\{na\}\} = \{mna\}$ $(\forall a \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{Z})$.
A pedál transzformáció tömör felírására szolgál a következő egyenlőség:

(4.3) Ha $0 < a \le \frac{1}{2}$ akkor $\{-2a\} = 1 - 2a$, míg $\frac{1}{2} \le a < 1$-re $\{2a\} = 2a - 1$.

(b) Az Euler-függvény $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* : n \to \varphi(n) := card\{m \mid 1 \le m < n \wedge (m, n) = 1\}$ az n-nél kisebb s vele relatív prím pozitív egészek száma. A rávonatkozó alapösszefüggések.

(4.4) $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ (minden p prímszám és k pozitív egész esetén);

(4.5) $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n)\varphi(m)$ $(n, m \in \mathbb{N}^* \wedge (n, m) = 1)$;

(4.6) ha $n \in \mathbb{N}^*$ törzstényezőkre bontása $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, akkor

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

Megjegyzés. (4.4) egyszerű számítás eredménye; kissé igényesebb a φ multiplikativitását kifejező (4.5) igazolása, (4.6) pedig az előző kettő egyenes következménye. A továbbiakban szükségünk lesz a nevezetes

(4.7) Euler-tételre Ha $a \in \mathbb{N}^*$ és $n \in \mathbb{N}^*$ relatív prímek, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, azaz n osztója az $a^{\varphi(n)} - 1$ számnak.

Ennek bizonyítása megtalálható [6]-ban, s rátámaszkodva igazoljuk a [3]-ban szereplő alábbi tételt

(4.8) Ha $3 \le n \in \mathbb{N}$ páratlan, akkor a $2^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \equiv \pm 1 \pmod{n}$ kongruenciák pontosan egyike igaz.

Bizonyítás. Ha $n = p^k$ (p prím, $k \in \mathbb{N}^*$) alakú, akkor p páratlan, s így $(2, p) = 1$, tehát az Euler-tétel értelmében $n \mid 2^{\varphi(n)} - 1$. A $\varphi(n) = p^{k-1}(p-1)$ következtében $\varphi(n)$ páros, tehát $2^{\varphi(n)} - 1 = (2^{\varphi(n)/2} - 1)(2^{\varphi(n)/2} + 1)$. A $p \ge 3$ prímszám csakis az egyiket oszthatja, (hisz különbségük 2) s vele együtt $n = p^k$ is.

Ha $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} =: p_i^{k_i} m_i$ $(1 \le s)$, akkor $\varphi(m_i)$ páros, tehát

$$2^{\frac{1}{2}\varphi(n)} - 1 \overset{(4.5)}{=} \left(2^{\varphi(p_i^{k_i})}\right)^{\frac{1}{2}\varphi(m_i)} - 1 =$$

$$= \left(2^{\varphi(p_i^{k_i})} - 1\right)\left(1 + 2^{\varphi(p_i^{k_i})} + \dots + 2^{\varphi(p_i^{k_i})\left(\frac{1}{2}\varphi(m_i)-1\right)}\right).$$

Az Euler-tétel értelmében $p_i^{k_i}$ osztja az utolsó felbontás első tagját, következésképp $2^{\frac{1}{2}\varphi(n)} - 1$ osztódik minden $p_i^{k_i}$-vel $(i = 1, s)$ s mivel ezek relatív prímek, ezért a szorzatukkal, azaz n-nel is osztható.

(c) Lax Péter a „Problémákon át vezető életút" című beszélgetésében (Természet Világa, 1998. III. Különszám, Matematika, 37–43 o.) „cinikus túlzásnak" minősíti R. Feynman kijelentését, miszerint „a nevelésre fordított erőfeszítésnek ritkán van nagy hatása, kivéve azokat a szerencsés eseteket, amikor az erőfeszítés majdnem felesleges". Ennek ellenében azt vallja, hogy „a tanáron sok múlik", s inkább azt kifogásolja, hogy „a matematika törzsanyaga túl tradicionális", miközben „évente mintegy százezer új tételt találnak ki – a középiskolai tananyag vajmi keveset változik", „mulatságos és egyben szomorú"-nak találja, hogy napjainkban is néha „egy (fizika)felvételi feladatsor feltételezett ismeretanyaga alapján akár Rákóczi hadnagya is a siker reményében pályázhatna a BME-re". A jó matematikatanártól elvárja, hogy „legyen számára fontos a téma, amiről beszél, és azt úgy tálalja, ahogyan arról a matematikusok gondolkodnak"; ezt támogatandó, „új tankönyvek írását" sürgeti „amelyek leginkább a tanárnak szólnak".

Irodalom

[1] M. Berger: Geometry I, Springer-Verlag (1994).

[2] Hajnal I. – Nemetz T. – Pintér L. – Urbán J.: Matematika IV. (fakultatív B változat). Nemzeti Tankönyvkiadó (1987).

[3] J. G. Kingston – J. L. Synge: The sequence of Pedal Triangles, Amer, Math, Monthly, 95(1988) 609–622.

[4] P. D. Lax: The ergodic character of sequences of pedal triangles, Amer. Math. Monthly, 97(1990) 377–381.

[5] Lévárdi L. – Sain M.: Matematikatörténeti feladatok. Tankönyvkiadó, Bp. (1982).

[6] I. Niven – H. S. Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Könyvkiadó Bp., 1978.

[7] Pólya Gy.: Indukció és Analógia, Gondolat Bp., (1988).

[8] K. Popper: Test és Elme, Tipotex, Bp. (1998).

[9] Szász Domokos: Matematikai biliárd. Ergodicitás és káosz. Természet Világa, 1998, III. Különszám: Matematika, 69–73.

[10] P. Ungar: Mixing Property of the Pedal Mapping, Amer. Math. Monthly, 97(1990) 896–400.

Kántor Sándor

A matematikai feladatok és megoldások konvenciói

Egy matematikai feladat megszövegezésénél, a megoldás leírásánál és a megoldás helyességének elbírálásánál nagyon sokszor szükség van a feladatszöveg és a megoldásszöveg olyan értelmezésére, ami nem a köznapi nyelv értelmezésén alapul, hanem a matematika tanítása és tanulása során alakul ki. A tanár és a diák, a feladatkitűző és a megoldó, valamint a megoldás helyességét ellenőrző (a dolgozatjavító) kell hogy azonosan értelmezze a vizsgált szöveget. Az azonos értelmezést megállapodások (konvenciók) segítik, ill. teszik lehetővé, hiszen nem lehet mindig mindent részletesen leírni.

Ezek a konvenciók nyilván kialakulnak, ha évek során együtt dolgozik a tanár és a diák. De sok az eltérő értelmezés akkor, ha csak egyszeri a munkakapcsolat, pl. az érettségi-felvételi közös dolgozatnál, vagy a tanulmányi versenyeken.

Ezzel a cikkel, amelyet vitaanyagnak tekintek, a konvenciók tisztázásához szeretnék hozzájárulni. Bizonyos esetekben határozott véleményem van arról, hogy mi legyen a konvenció, máskor csak azt hangsúlyozom, hogy kell valamilyen, de azt szerintem több különböző közül lehet kiválasztani.

A konvenciókat matematikai szempontból vizsgálom, és csak néhány esetben értékelési (pontozási), pedagógiai stb. szempontból. Nem vizsgálom, hogy a feladattal mit mérhetünk, hogyan mérhetünk, jól választottak-e a feladatok stb.

A téma tárgyalása során a dolgozatjavító tanárt helyezem a középpontba, tehát ismerve a javító tanár gondolatait, de csak elképzelve, hogy milyen gondolatokat takar a feladatnak, a hivatalos megoldásnak és a diák dolgozatának a szövege. Tehát: a javító tanár milyen matematikai jellegű megállapodások alapján veti össze a feladat szövegét és a hivatalos megoldást a diák megoldásával.

A kialakított konvenciókat jó lenne hivatalosan elfogadottnak tekinteni, hogy egyrészt a diákok felkészítése során ne kelljen annyiszor elmondani, hogy „biztonság kedvéért ezt is, azt is írd le, mert egyszer így, máskor úgy kívánták meg", másrészt reklamációnál hivatkozni lehessen rájuk.

Általános jellegű megállapodások.

A1. A feladat megoldása során mindig bizonyítani kell. Akkor is, ha a feladat szövege ezt nem tartalmazza.

Pl.: „mennyi", „hol van", „írja fel" stb.

A2. A bizonyítást jelentő, egymás után következő állítások közül annyit kell feltétlenül leírni, amennyiből egy jó diák szemével nézve a következtetési lépések átláthatók.

Megjegyzés: Döntő a lényeg világos kiemelése, a trivialitásokat nem kell leírni. A feladatmegoldás nem szőrszálhasogatás. Itt és a következő két pontban arra gondolok, hogy a bizonyítás helyességének elbírálásánál a felsőbb matematika elvei érvényesüljenek.

A3. A bizonyítás során az elfajuló esetek tárgyalása nyilvánvaló esetben elhagyható.

Pl.: a bizonyítás során háromszöget mondhatunk akkor is, ha az bizonyos esetekben ugyan szakasszá fajul el, de arra az esetre triviálisan igaz az állításunk.

A4. A fejben elvégezhető számításokat nem kell leírni.

A5. Ha a feladat számszerű végeredménye műveleti jelekkel és függvényjelekkel van adva, akkor az egyszerűsítéseket el kell rajta végezni,

és közelítő értékét legalább két tizedesjegy pontossággal megadni.

A6. Azt, hogy a feladat nyitott (többféle jó válasz van, és ezek különböző értékelést kapnak), a feladatszövegben jelezni kell.

Pl.: „hozzuk egyszerűbb alakra", „mit mondhatunk róla".

A7. A helytelen szóhasználat, ha nem értelemzavaró, akkor következmény nélkül marad.

Megjegyzés: Felvételi feladatban is sokszor előfordult már ilyen, pl. „a *CD* szakasz felezi a γ szöget", „egységoldalú kocka".

A8. A középiskolás anyagba nem tartozó, a felsőbb matematikából ismert tételre lehet hivatkozni a bizonyítás elvégzése vagy a megtalálási hely megjelölése nélkül is.

A feladat szövegéhez kapcsolódó megállapodások.

F1. „Szerkessze meg" feladatszöveg esetén le kell írni a szerkesztés lépéseit, és bebizonyítani, hogy ez valóban a keresett alakzatot adja.

Megjegyzés: Sokan úgy vélik, hogy a megoldhatóság feltételének megadását és annak bizonyítását is le kell írni. De ha nehéz a diszkusszió, akkor mégse tartozik bele. Szerintem, ha diszkussziót kérünk, akkor az szerepeljen a feladat szövegében.

F2. „Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán" feladatszöveg azt jelenti, hogy adjuk meg az egyenletet kielégítő számok halmazát (a gyököket), és bizonyítsuk be, hogy pontosan ezek a gyökök.

Megjegyzés: Sokan úgy vélik, hogy a megoldáshoz hozzátartozik a feltételek megadása (az egyenlet két oldalán levő függvények közös értelmezési tartományának megadása) abban az esetben is, ha ez a megadás nem része a feladatszöveg fenti értelmezése alapján készített megoldásnak. Szerintem, ha ezt is elvárja a feladat kitűzője a megoldótól, akkor szerepeljen a feladat szövegében.

F3. „Hozzuk egyszerűbb alakra" azt jelenti, hogy rövidebb, kevesebb jellel leírt alak legyen.

F4. „Hol helyezkednek el azok a pontok" azt jelenti, hogy „adja meg a.zoknak a pontoknak a halmazát".

F5. „Fejezze ki" azt jelenti, hogy a középiskolában használt matematikai jelölésekkel adja meg az illető mennyiséget.

F6. „Pontos érték" racionális számot jelent.

Megjegyzés: Legjobb lenne, ha ez a szöveg nem is szerepelne!

F7. Geometriai alakzatok megadásánál a betűzési sorrend körüljárási sorrendet is jelent.

Pl.: *ABCD* paralelogramma esetén *A* és *C* átellenes csúcsok.

F8. Az egyes szám és a többes szám szerepeltetése a feladat szövegében lényegtelen a megoldás szempontjából.

Pl.: „adja meg azt a *C* pontot", és történetesen két ilyen van, vagy „mely számok elégítik ki", és történetesen csak egy van.

Megjegyzés: A diák ideges, hogy hol rontotta el?!

A feladatmegoldáshoz kapcsolódó megállapodások.

M1. A lehetséges esetek végigpróbálása is teljes értékű bizonyítás.

M2. Ha valamiből valami következik, és egy jó diáktól elvárható, hogy lássa azt, hogy hogyan következik, akkor csak azt kell leírni, hogy miből és mi következik, a hogyant már nem.

Pl.: $3|f(n)$ és $8|f(n)$-ből következik $24|f(n)$, vagy $2^{f(x)} = 2^{g(x)}$-ból következik $f(x) = g(x)$.

M3. Egyenletek megoldásánál az egymás alá írt egyenletek – hacsak nincs konkrét utalás a gyökök kapcsolatára – következményeseknek tekintendők. Pl.: nem tekinthető a gyökök kapcsolatára való utalásnak az, hogy „rendezéssel kapjuk", vagy hogy „átalakítva a következő alakot kapjuk". Az általánosan elfogadott „ekvivalens" szót ne helyettesítse más szó, pl. „egyenértékű".

M4. Egyenlet felállítását indokolás hiányában úgy kell értelmezni, hogy „ha van a szövegnek megfelelő x érték, akkor erre fennáll, hogy".

M5. Ha egy egyenlet megoldása csak eszköz (nem ez volt a feladat), akkor el lehet tekinteni annak kizonyításától, hogy a megtalált érték a gyök.

M6. A szimmetriára való hivatkozást (egyenletrendszernél, geometriai alakzatnál) részletezni kell.

M7. Egy halmaz egy tetszőleges elemére végzett bizonyítás a halmaz minden elemére érvényes, de ezt jelezni kell.

Megjegyzés: Geometriai feladatoknál szokásos probléma ez.

M8. Ábra nem indokolhat.

Megjegyzés: Térgeometriai feladatok megoldásánál gyakran a szemléletre hivatkozva fogadunk el igaznak állításokat, de nem a rajzra hivatkozva!

M9. A különbségképzésnél „biztosra" kell menni.

Pl.: számtani sorozatról nem elég azt mondani, hogy szomszédos tagjainak különbsége állandó.

M10. A másodfokú egyenletnek nincs egy gyöke. Két gyöke lehet egyenlő.

M11. A mértani sor összegképletének felírásánál a $q \neq 1$-et ki kell írni.

M12. A függvény jelölésére többféle módot (a régebben szokásosakat is) lehet használni.

Pl.: $f(x) = x^2 + 1$.

M13. A halmazokat (különösen az egyenlet megoldáshalmazát) egyértelműen és pontosan kell megadni.

Pl.: $x_0 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ esetében nem lehet arra hivatkozni, hogy a k egész szám „szokott lenni", hanem $k \in \mathbb{Z}$-t is ki kell írni.

M14. A közelítő értékek használatánál hullámvonalat kell alkalmazni egyenlőség helyett.

Befejezésül az értékelés (pontozás) egy nagyon fontos problémájához, a részpontok adásához fűzök még néhány gondolatot.

Én a jó diák pártján állok, és az ő szempontjait javaslom érvényesíteni. Ezt úgy lehetne összefoglalni, hogy az értékelés teljesítménycentrikus, és ne tudáscentrikus legyen.

Egy jó diák természetesen nem ad be tisztázatként próbálkozásokat, részletszámításokat. Ha a megoldás közben rájön, hogy nem tudja folytatni vagy hibázott, rosszul okoskodott, akkor nem ad be semmit, nem nevezi megoldásrészletnek addigi munkáját.

Részpont adását csak a következő esetekben tartom elfogadhatónak:

- A feladat önálló részekre bontható, és valamelyik rész megoldása helyes.
- A megoldásban hiba van (nem az, hogy nincs befejezve), de az könnyen javítható. A feladatmegoldás lényeges ötlete helyesen szerepel.
  Pl.: számolási hiba.
- Bizonyos esetek tárgyalásának kifelejtése.
  Pl.: három egymást érintő körről kell valamit bizonyítani, és csak az egymást kívülről érintő köröket vizsgálja.

Véleményem alátámasztására megemlítem, hogy tragikus lenne, ha a diákot arra kellene biztatni, hogy írja le mindazt (tételeket, lehetséges átalakításokat stb.), ami a feladattal kapcsolatban eszébe jut, amivel a megoldás során próbálkozott, hátha részpontot kap érte! Másrészt a tanár számára sokszor megoldhatatlan probléma annak eldöntése, hogy mit tekinthet „befejezhető megoldás részé"-nek.

Indok lehet az is, hogy a tesztrendszerű értékelésnél sincs részpont. Ugyanakkor nagyon fontos, hogy a diák a dolgozatírás előtt megtudja az értékelés szempontjait (többletmegoldás jutalma, számolási hiba büntetése stb.).

Kiss Sándor

Pont körre vonatkozó hatványa

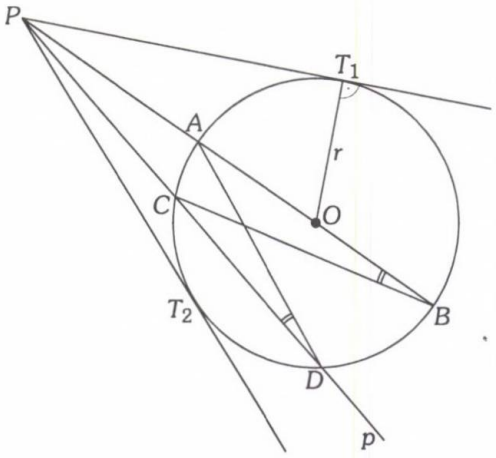
Ennek a jegyzetnek a megírására annak észrevétele késztetett, hogy a pont körre vonatkozó hatványának fogalmát több matematikai kiadványban is tévesen értelmezik vagy használják. Következésképpen az e fogalommal kapcsolatos eredmények sok esetben hibásak. Bár olyan esettel is találkoztam, hogy egyik feladatmegoldásnál a fenti fogalom kétszeri téves használata ellenére végül is helyes eredmény jött ki. De nem ez a jellemző. Jegyzetem célja megmutatni a fogalom lehetséges hibás interpretációit, megadván a pont körre vonatkozó hatványának helyes definícióit.

Legyen K egy O középpontú, r sugarú kör, P pedig e kör síkjának tetszőleges pontja. Induljunk ki a Matematikai Kislexikon (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972) 163. oldalán található értelmezésből: a $d^2 - r^2$ számot, ahol d a P pontnak a K kör középpontjától való távolsága, r pedig a K kör sugara, a P pont K körre vonatkozó hatványának nevezzük. Jelölje ezt a $\rho_P(O, r)$ szimbólum:

$$\rho_P(O, r) = OP^2 - r^2 = d^2 - r^2. \qquad (1)$$

Az értelmezésből adódóan pont körre vonatkozó hatványa pozitív, zéró vagy negatív attól függően, hogy a P pont a K körön kívül, rajta vagy a körön belül fekszik-e.

Először vegyük fel a P pontot a K körön kívül. (1. ábra). A P pontból a K körhöz húzott érintők érintési pontjait jelölje T_1 és T_2. Tegyük fel, hogy a P pontból kiinduló p félegyenes úgy forog e pont körül, hogy közben a $\widehat{T_1PT_2}$ belsejében marad. Ekkor a p félegyenes két pontban metszi a K kört. Jelölje C és D ezeket a pontokat (1. ábra).



1. ábra

1. tétel. Ha a K kör adott, a $PC \cdot PD$ szorzat csak a P pont helyzetétől függ, rögzített P esetén pedig $PC \cdot PD$ = állandó.

Bizonyítás. A PO egyenes metssze a K kört az A és B pontokban (1. ábra). Ha a P pont fix, akkor a $PA \cdot PB$ szorzat állandó. A PAD és PCB háromszögek hasonlósága miatt: $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Leftrightarrow$ $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ = állandó, amit bizonyítani akartunk.

Legyen most a P pont a K kör belsejében (2. ábra). A fentihez hasonló módon igazolható, hogy ebben az esetben is érvényes az 1. tétel kijelentése, azaz

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB = \text{állandó}.$$

Felmerül a kérdés, milyen kapcsolatban áll a P pont K körre vonatkozó hatványa a $PC \cdot PD$ szorzattal?

Ha P a körön kívül van, akkor

$$PC \cdot PD = (OP - r) \cdot (OP + r) = \\ = OP^2 - r^2 = \rho_P(O, r).$$

Tehát a $PC \cdot PD$ szorzat értéke nem más, mint a P pont K körre vonatkozó hatványa.

Ha P a körön belül fekszik, akkor

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB = (r - OP) \cdot (r + OP) = \\ = r^2 - OP^2 = -\rho_P(O, r).$$

Tehát ebben az esetben a P pont K körre vonatkozó hatványa $-PC \cdot PD$. Itt a (–) előjel lényeges, elhagyása sok hibának, rossz eredménynek lehet az oka.

Legyen EF a K kör azon húrja, mely átmegy a P ponton és merőleges OP-re (2. ábra). Az OPE derékszögű háromszögben:

$$r^2 - OP^2 = \left(\frac{OE}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \rho_P(O, r) = -\frac{EF^2}{4}.$$

Az OPT_1, szintén derékszögű háromszögben (1. ábra):

$$OP^2 - r^2 = PT_1^2 = PT_2^2,$$

azaz

$$\rho_P(O, r) = PT_1^2 = PT_2^2.$$

A P külső pont K körre vonatkozó hatványa e pontból a körhöz húzott érintő szakasz hosszának négyzetével egyenlő.

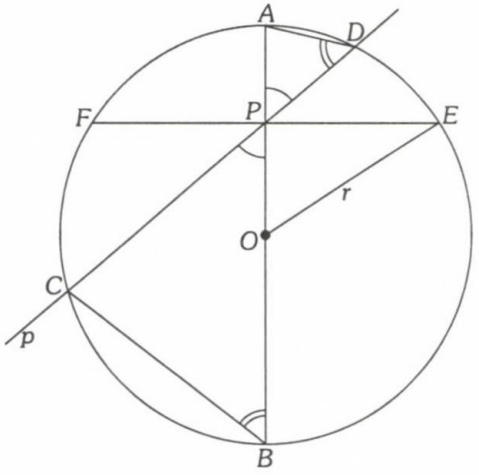
Most összefoglaljuk az eddigi eredményeket:

I. Ha a P pont a K körön kívül van, (1. ábra) akkor:

$$\rho_P(O, r) = OP^2 - r^2 = PC \cdot PD = \\ = PT_1^2 = PT_2^2 \qquad (2)$$

II. Ha a P pont a K körön belül van, (2. ábra) akkor:

$$\rho_P(O, r) = OP^2 - r^2 = -PC \cdot PD = -\frac{EF^2}{4}. \qquad (3)$$

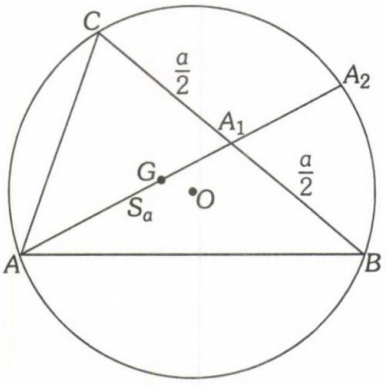


2. ábra

Mindkét esetben a pont körre vonatkozó hatványának három értelmezése lehetséges. Ezek közül csak a jegyzet elején adott $\rho_P(O, r) = OP^2 - r^2$ definíció esetén hagyható figyelmen kívül a P pontnak a K körhöz viszonyított helyzete. A többi értelmezés esetében ezt figyelembe kell venni. A leggyakrabban előforduló hiba az, hogy sokan a $PC \cdot PD$ szorzatot a P pont K körre vonatkozó hatványának veszik, a P helyzetétől függetlenül, holott ez csak „féligazság". Csak akkor igaz, ha P a körön kívül van. Ez alól a már idézett Matematikai Kislexikon sem kivétel, amelynek „hatvány" szócikkében szó szerint a következő áll: „Ha a sík P pontján átmenő e egyenes a sík K körét az A és B pontban metszi, akkor a $PA \cdot PB$ szorzat értéke nem változik, miközben az e egyenest a P pont körül forgatjuk. Ez az állandó szám a P pontnak a K körre vonatkozó hatványa". A körhöz képest külső P pontok esetén – tesszük hozzá, az igazság kedvéért. A másik általam tapasztalt hiba, hogy a matematikusok egy része abban az esetben, ha P a K kör belső pontja, az $r^2 - OP^2$ számot tekinti a P pont K körre vonatkozó hatványának.

Most egy példával szemléltetem, hogy milyen fontos a (3) összefüggésekben az a bizo-

nyos (–) előjel. Tekintsünk egy ABC háromszöget. Jelölje ennek súlypontját G, körülírt körének sugarát R, középpontját pedig O (3. ábra). A (2) és (3) képletek felhasználhatók az OP szakasz hosszának meghatározására: $OP^2 - r^2 + \rho_P(O, r)$. Feltéve persze, hogy a P pont K körre vonatkozó hatványát ki tudjuk számítani, a többi képlet valamelyikével.



3. ábra

Az OG szakasz hossza ismert:

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

A G súlypontnak a körülírt körre vonatkozó hatványa:

$$\rho_G(O, R) = -GA \cdot GA_2 = \frac{2}{3}S_a\left(\frac{1}{3}S_a + A_1A_2\right),$$

ahol S_a az A csúcshoz tartozó oldalfelező hossza, A_1 a BC felezőpontja, A_2 pedig a körülírt körnek az AG egyenessel való második metszéspontja.

Írjuk fel az A_1 pontnak a körülírt körre vonatkozó hatványát: $-A_1B \cdot A_1C = -A_1A \cdot A_1A_2$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = S_a \cdot A_1A_2$. Tehát:

$$\rho_G(O, R) = -\frac{2}{9}S_a^2 - \frac{2}{3}S_a \cdot A_1A_2 = \frac{2}{9}S_a^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{4} =$$

$$= -\frac{2}{9}\cdot\frac{2b^2-2c^2-a^2}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2} = -\frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

A fenti eredményt felhasználva az $OG^2 = R^2 + \rho_G(O, R) = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$, már ismert *helyes* eredményt kapjuk. Ha a $\rho_G(O, R) = -\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ képletből a (–) előjelet elhagyjuk, más szóval, ha rossz értelmezésből indulunk ki, akkor az $OG^2 = R^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ *hibás* összefüggéshez jutunk.

Végül megadjuk a háromszög néhány nevezetes pontjának a körülírt körre vonatkozó hatványát. Legyen H a háromszög magasságpontja, I a beírt kör középpontja, L pedig a Lemoine-féle pontja. Felhasználjuk az alábbi eredményeket:

$$OH^2 = (3 \cdot OG)^2 = 9 \cdot OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2);$$

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \text{ (Euler-féle összefüggés)};$$

$$OL^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Tehát:

$$\rho_H(O, R) = OH^2 - R^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) - R^2 = 8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\rho_I(O, R) = OI^2 - R^2 = R^2 - 2Rr - R^2 = -2Rr = -\frac{abc}{a+b+c};$$

$$\rho_L(O, R) = OL^2 - R^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} - R^2 = -\frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

HÍREK VERSENYEKRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat matematika versenye 6. osztályos tanulóknak (Budapest) 1999. január 19-én (Munkaidő 90 perc)

1. Melyik az a pozitív egész szám, amelyből 7-et kivonva és a maradékot 7-tel szorozva ugyanannyit kapunk, mintha 11-et vonunk ki a számból és a maradékot 11-gyel szorozzuk?

2. Egy kört egyenesekkel 6 részre osztottunk. Legalább hány egyenes szükséges ehhez? Legfeljebb hány egyenessel tehetjük ezt meg? (Természetesen csak a körön áthaladó egyenesek számítanak.)

3. Melyik az a különböző számjegyekből álló legnagyobb természetes szám, amelyben bármely három számjegy összege kisebb 19-nél?

4. Egy matematika versenyen 6 feladat volt és mindegyik teljes megoldásáért 6 pontot lehetett kapni. Péter eléggé sok időt eltöltött az első 3 feladattal, a többire már kevés ideje maradt, így az első 3 feladatra összesen 3-szor annyi pontot kapott, mint az utolsó háromra. Hány pontot kapott a negyedik feladatra, ha tudjuk, hogy ez az elért pontszámának az ötöd része?

5. Egy négyzet alakú termet egybevágó („egyforma") négyzet alakú járólapokkal burkolnak. (Természetesen e négyzetek oldalai párhuzamosak a terem oldalaival.) A terem két átlója összesen 125 járólapon halad át. Hány járólapot használtak fel összesen?

6. 8 dobozban piros és kék golyók találhatók. Egy dobozban mindkét színű golyó előfordulhat. A dobozokban rendre 4; 7; 10; 15; 25; 28; 43 és 59 golyó van. Tudjuk, hogy az egyik dobozt el lehet úgy venni, hogy a megmaradt 7 dobozban összesen kétszer annyi piros golyó legyen, mint ahány kék. Melyik ez a doboz?

Matematika verseny 8. osztályosoknak Berzsenyi Dániel Gimnázium 1997. november 25. (Munkaidő 120 perc)

1. Egy nagy papírra egymás után leírjuk 1-től kezdve a pozitív egész számokat. Egy perc alatt 80 számjegyet tudunk leírni. Mennyi ideig tart, amíg az 1997-et is leírjuk?

2. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely osztható 4-gyel, 5-tel és 6-tal is?

3. Az O középpontú 4 egység sugarú kör egyik pontja D. Az OD sugarat a $DA = 4$ egység hosszúságú szakasszal meghosszabbítjuk. Az A pontból érintőket húzunk a körhöz, az érintési pontok B és C. Mekkora az ABC háromszög köré írható kör sugara?

4. Egy turista A-ból B-be ment, összesen 11,5 km-t tett meg. Az út először emelkedőn vezetett, majd vízszintes volt a terep, ezután egy lejtő következett. Összesen 2 óra 54 percig tartott az útja. B-ből A-ba visszafelé ugyanez az út 3 óra 6 percig tartott. A turista emelkedőn óránként 3 km-t, vízszintes terepen 4 km-t, lejtőn 5 km-t tett meg. Milyen hosszú az A és B közötti úton a vízszintes terep?

5. Van egy 7; 9 és 11 dm oldalélű téglatest alakú ládánk és 77 darab egyforma négyzetes oszlop alakú kerámiatéglánk, amelyeknek oldalélei 3; 3 és 1 dm. Be tudjuk-e rakni az összes téglát a ládába anélkül, hogy egyet is eltörnénk?

Matematika verseny
8. osztályosoknak
Sipkay Barna Szakközépiskola
Nyíregyháza
1997. november 25.
(Munkaidő 60 perc)

1. Számítsd ki a következő kifejezés értékét tizedes törtekre való átváltás nélkül!

$$5^2-\left(\frac{7}{16}+\frac{5}{24}-1\frac{1}{12}\right):\frac{7}{48}=$$

2. Oldd meg a következő egyenletet!

$$6-\frac{6x-4}{5}=2x+\frac{2-5x}{3}$$

3. A matematikaverseny első három helyezettjének 10200 Ft értékű ajándékot vesznek. A vásárolt tárgyak értéke között a következő az összefüggés: az első a másodikénak 125%-a, a harmadik az elsőének 75%-a. Mennyi a három ajándék értéke külön-külön?

4. Egy téglatest alakú fürdőmedence hosszúsága 24 m, szélessége 12 m. Milyen mély a medence, ha percenként 8 m^3 vizet engedve a csapokon 1 óra 30 perc alatt telik meg?

5. Egyenlőszárú trapéz magassága 10 egység. Mekkora a trapéz területe, ha az átlói merőlegesek egymásra?

6. A mesebeli róka a következő egyezséget kötötte egy legénnyel: ahányszor átmegy a hídon, mindannyiszor a róka megkétszerezi a pénzét, s ebből a pénzből kell 24 krajcár vámot fizetnie. A legény azt hitte, hogy ily módon sok pénzhez juthat, de nagyot csalódott. Amikor ugyanis harmadszor ment át a hídon és kifizette a vámot, nem maradt egy krajcárja sem. Mennyi pénze volt a legénynek, amikor az egyezséget megkötötte?

Felvételi feladatok 8. osztályosoknak

A következő feladatsorokat a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnáziumban írták a megjelölt tagozatokra jelentkező tanulók, 1999-ben.
A munkaidő 30 perc volt.

Olasz tagozat
(február)

1. Két ládában összesen 40 kg alma van. Tudjuk, hogy az első ládában levő alma harmadrésze ugyanolyan súlyú, mint a második ládában levő alma 20%-a. Mennyi alma van az egyes ládákban?

2. Egy háromszög két szöge 40° és 60°. Mekkora szöget zár be egymással harmadik csúcsból induló szögfelező és magasságvonal?

3. Csupa különböző számjegyekből álló, négyjegyű, 4-gyel osztható számokat készítünk az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

Humán tagozat
(február)

1. Amikor Barnabás 5 éves volt, akkor az öccse, Bence 3 éves. Most ketten együtt 26 évesek. Hány éves most Barnabás ?

2. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben van ismétlődő számjegy (például: 121, 200, 999) ?

3. Egy egyenlőszárú háromszög egyik külső szöge 100°. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei ?

Biológia-kémia tagozat
(február)

1. Két pozitív egész szám összege 326. Ha a nagyobbikat elosztjuk a kisebbikkel, akkor a hányados 9, a maradék pedig 6. Melyik ez a két szám ?

2. Az ABC háromszög belsejében a P pont úgy helyezkedik el, hogy $PA = PB = PC$. A háromszög szögeinek mérőszáma 70°,

60° és 50°. A P pontot összekötjük a háromszög csúcsaival, így három P csúcsú szög keletkezik. Számítsuk ki ezek mérőszámát!

3. Egy konvex sokszög oldalainak és átlóinak számát összeadva 21-et kapunk. Hány oldalú a sokszög ?

Angol-német tagozat (február)

1. Az A városból egy teherautó reggel 6 órakor indul a B városba, óránként átlag 60 km-t tesz meg. Reggel 7 órakor utána indul egy személyautó, amely óránként átlag 80 km-t tesz meg. Hány óra múlva éri utol a személyautó a teherautót ?

2. Mekkora szöget zárnak be egy derékszögű háromszögben a hegyesszögek szögfelezői?

3. Egy nagy papírlapra Peti egymás után leírja 1-től kezdve a pozitív egész számokat. Milyen számjegy áll az 1999. helyen ?

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat kitűzőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 1999. május 31.**

120. Igazoljuk, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha\le\frac{\pi^2}{3}\le\alpha^2+\beta^2+\gamma^2!$$

Bencze Mihály, Brassó

121. Mutassuk meg, hogy ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok mindegyike vagy $+1$, vagy -1, és $x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+x_3x_4x_5x_6+\ldots+x_nx_1x_2x_3=0$, akkor n osztható 4-gyel!

122. Határozzuk meg azokat az 1-től és egymástól is különböző p és q pozitív egész számokat, amelyekre az

$$\frac{1-\sin^p x-\cos^p x}{1-\sin^q x-\cos^q x}$$

tört értéke az x változó megengedett értékeitől függetlenül állandó!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

123. Véletlenszerűen, visszatevés nélkül kihúzunk öt számot az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy az első három kihúzott szám is, és a kihúzott öt szám is számtani sorozatba rendezhető, nagyobb, mint $\frac{6}{(n-2)^3}$!

124. A 3-nál nem kisebb n pozitív egész szám rendelkezik a következő tulajdonsággal: Az n oldalú, O középpontú szabályos sokszögnek van $\left[\frac{n}{2}\right]$ olyan csúcsa, amelyekből alkotott H ponthalmazra és a H O pont körüli $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ szögű elforgatásaival kapott $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ ponthalmazokra teljesül, hogy

$$|H\cap H_1|=|H\cap H_2|=\ldots=|H\cap H_{n-1}|=2.$$

Határozzuk meg az n összes lehetséges értékét!

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (105-109. feladatok)

105. Legyen n pozitív egész szám! Létezik-e $2n+1$ darab egymást követő $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ természetes szám úgy, hogy

a) $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_{n+1} + \ldots + a_{2n}$;

b) $a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2 = a_{n+1}^2 + \ldots + a_{2n}^2$

teljesüljön? (Két kérdés!)

„Concours général" verseny, Franciaország

Megoldás: a) A feltételekből adódóan

$$a_0 = a_{n+1} - a_1 + a_{n+2} - a_2 + \ldots + a_{2n} - a_n,$$

valamint

$$a_{n+i} - a_i = a_0 + (n+i) - (a_0 + i) = n$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$. Így $a_0 = n \cdot n = n^2$.

Kaptuk, hogy adott n esetén az n^2, n^2+1, n^2+2, ..., n^2+2n természetes számok megfelelnek.

b) A feltételekből kapjuk, hogy

$$a_0^2 = a_{n+1}^2 - a_1^2 + a_{n+2}^2 - a_2^2 + \ldots + a_{2n}^2 - a_n^2,$$

valamint

$$a_{n+i}^2 - a_i^2 = (a_0 + n + i)^2 - (a_0 + i)^2 =$$
$$= n \cdot (2a_0 + n + 2i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Így

$$a_0^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{n} (2a_0 + n + 2i) = 2n^2 a_0 + 2n^3 + n^2.$$

Ez utóbbi egyenlet a_0-ra nézve másodfokú, lehetséges megoldásai: $2n^2 + n$, illetve $-n$. Mivel a_0 természetes szám, ezért $a_0 = 2n^2 + n$. Adott n esetén a megfelelő természetes számok tehát $2n^2 + n$, $2n^2 + n + 1$, $2n^2 + n + 2$, ..., $2n^2 + 3n$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

106. Határozzuk meg az összes olyan függvényt, amelyre

$$f(af(x) + f(y)) = af^2(x) + y$$

teljesül bármely valós x, y, és 1-től különböző pozitív valós a szám esetén!

Bencze Mihály, Brassó

I. megoldás: Legyen $x = y = 0$ és $a = 2$, majd $a = 3$. Ekkor $f(f(0)) = 2f^2(0)$ és $f(f(0)) = 3f^2(0)$, ahonnan $f(0) = 0$.

Ha $x = y$, akkor $f(axf(x) + f(x)) = af^2(x) + x$. Ha $x > 0$, vagy $x < -\frac{1}{a}$, akkor $f\big(axf(x) + f(x)\big) =$

$$= f\left(\frac{ax+1}{x} \cdot xf(x) + f(0)\right) = \frac{ax+1}{x} \cdot f^2(x).$$ Mivel a bármilyen nagy lehet, ezért ez utóbbi egyenlőség bármely 0-tól különböző x esetén teljesül. Tehát 0-tól különböző x-ekre $af^2(x) + x =$

$$= \frac{ax+1}{x} \cdot f^2(x), \text{ ahonnan } f^2(x) = x^2. \qquad (1)$$

Legyen $x = 0$. Ezt beírva az eredeti egyenletbe, figyeleme véve, hogy $f(0) = 0$, kapjuk, hogy $f(f(y)) = y$. (2)

Legyen most $x = 1$, $y = 0$. Ekkor az eredeti egyenlet $f(af(1)) = af^2(1)$ alakot ölt, ahová $z = af(1)$-et helyettesítve $f(z) = f(1) \cdot z$ adódik. A feladat feltételei alapján $z \neq f(1)$, valamint z és $f(1)$ előjele megegyezik. (1) alapján $f(1) = \pm 1$. Ha $f(1) = 1$, akkor minden pozitív z-re $f(z) = z$. Ha $f(1) = -1$, akkor minden negatív z-re $f(z) = -z$.

A továbbiakban belátjuk, hogy az f függvény páratlan.

(1) miatt $f(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$.

Legyen $x = \frac{1}{a}$ és $y = -\frac{1}{a}$. Ekkor

$$f\left(a \cdot \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{1}{a}\right) + f\left(-\frac{1}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0,$$

ahonnan adódik, hogy $f\left(\frac{1}{a}\right) + f\left(-\frac{1}{a}\right) = 0$, azaz

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f\left(-\frac{1}{a}\right). \qquad (3)$$

A feltétel szerint $a \neq 1$, ezért be kell még látni, hogy $f(1) = -f(-1)$. Ez utóbbi (2) alapján könnyen adódik, ha még figyelembe vesszük, hogy (1) miatt $|f(1)| = |f(-1)| = 1$ (1), (2) és (3) alapján tehát a függvényegyenletnek két megoldása van: $f(x) = x$, illetve $f(x) = -x$. Könnyen ellenőrizhető, hogy mindkét függvény valóban megoldás.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

II. megoldás: Általánosítjuk a feladatot: Határozzuk meg azokat az $f: R \to R$ függvényeket, amelyekre

$$f\big(g(xf(x))+f(y)\big)=g\big(f^2(x)\big)+y$$

teljesül minden valós x, y esetén, tudva azt, hogy $g\colon R\to R$ függvény kölcsönösen egyértelmű és $g(0)=0$! (Látható, hogy ha $a\neq 0$, akkor a $g(x)=ax$ függvény esetén kapjuk az eredeti feladatot.) Ezt az általánosabb feladatot oldjuk meg.

Legyen $x=0$. Ekkor

$$f\big(f(y)\big)=g\big(f^2(0)\big)+y \qquad (1)$$

egyenlőséget kapjuk, amely fennáll bármely valós y esetén. (1)-ből látható, hogy az f függvény értékkészlete R és kölcsönösen egyértelmű, azaz van inverz függvénye.

Legyen $x=f^{-1}(0)$. Ekkor

$$f\big(f(y)\big)=g(0)+y=y \qquad (2)$$

minden valós y esetén.

(1) és (2) összevetéséből $g\big(f^2(0)\big)=g(0)$, amiből, figyelembe véve, hogy g kölcsönösen egyértelmű, kapjuk, hogy $f(0)=0$.

Helyettesítsünk most az eredeti függvényegyenletbe $y=0$-t. Kapjuk, hogy

$$f\big(g(xf(x))\big)=g\big(f^2(x)\big) \qquad (3)$$

(3)-ba x helyett $f(x)$-et írva, és figyelembe véve (2)-t az

$$f\big(g(xf(x))\big)=g\big(x^2\big) \qquad (4)$$

egyenlőség adódik. (3), (4) és g kölcsönös egyértelműsége alapján adódik, hogy $f(x)\in\{-x,\,x\}$, azaz

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{ha } x\in A\\ 0, & \text{ha } x=0\\ -x, & \text{ha } x\in B\end{cases},$$

ahol $0\notin A\cup B$ és $A\cup B\cup\{0\}=R$. Ha az A és B halmazok egyike sem üres, akkor választhatunk egy x-et az A és egy y-t a B halmazból, amelyekre $f(x)=x$ és $f(y)=-y$. Ezeket beírva az eredeti egyenlőségbe, kapjuk, hogy

$$f\big(g(x^2)-y\big)=g\big(x^2\big)+y. \qquad (5)$$

Ha (5)-ben $g\big(x^2\big)-y\in A\cup\{0\}$, akkor $y=0$, ha pedig $g\big(x^2\big)-y\in B$, akkor $x=0$, ami mindkét esetben ellentmond a $0\notin A\cup B$ feltételnek. Ebből adódóan az A és B halmazok közül az egyik üres, azaz $f(x)=x$ minden x valós számra, vagy $f(x)=-x$ minden x valós számra. Behelyettesítéssel látható, hogy az első függvény mindig megoldás, a második csak akkor, ha a g függvény páratlan.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 6.

107. Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)$$

határértéket!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

I. megoldás: A „rendőr-elv" alkalmazása végett előbb felső, majd alsó becslést adunk a sorozat általános tagjára.

A harmonikus és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján $n>1$ esetén

$$n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\big(n^2+k\big)}=$$

$$=\sqrt{n^2+\frac{n+1}{2}}<n+\frac{1}{n}+\frac{1}{4}. \qquad (1)$$

(A második becslés helyessége négyzetre emeléssel könnyen ellenőrizhető.)

(1)-ből ekvivalens átalakítással kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}>\frac{n}{n+\frac{1}{n}+\frac{1}{4}},$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\frac{n}{n+\frac{1}{n}+\frac{1}{4}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n}}=\frac{1}{4}. \qquad (2)$$

A megfelelő alsó becsléshez először alkalmazzuk $n>1$ esetére a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<n\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k}}. \qquad (3)$$

Becsüljük most a (3) jobb oldalán szereplő összeg általános tagját. Számolással könnyen ellenőrizhető, hogy $1<\left(n^2+k\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{k}{n^4}+\frac{k^2}{n^6}\right)$.

Ezt felhasználva a (3) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő összeg minden egyes tagja felülről becsülhető, amiből adódóan

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<$$

$$<n\cdot\sqrt{\frac{n\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{n(n+1)}{2n^4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^6}}{n}}=$$

$$=\sqrt{1-\frac{n+1}{2n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^4}}$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)\geq$$

$$\geq\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(1-\sqrt{1-\frac{n+1}{2n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^4}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(1-1+\frac{n+1}{2n^2}-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^4}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{n+1}{2n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^4}}}=\frac{1}{4}. \qquad (4)$$

(2) és (4) alapján a keresett határérték $\frac{1}{4}$.

Barczi Péter, Szeged

Megjegyzés: A „rendőr-elv" alkalmazásához szükséges alsó és felső becslés megadható a pozitív egész n-ekre érvényes

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

egyenlőtlenség felhasználásával is. (Tekintett egyenlőtlenség megtalálható például Ábrahám Gábor: Nevezetes egyenlőtlenségek – Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1995. – című könyvében, 58. oldal 14. feladat.)

Tóth Sándor, Sárospatak

II. megoldás: Az $f\colon]-1;\infty[\to R$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ függvény szigorúan csökkenő, így az $s_n=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$ felfogható, mint az f függvényhez és a $\left[0;\frac{1}{n}\right]$ intervallum n egyenlő részre történő felosztásához hozzárendelt alsó közelítő összeg, de úgy is, mint az f függvényhez és az $\left[\frac{1}{n^2};\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right]$ intervallum n egyenlő részre történő felosztásához hozzárendelt felső közelítő összeg. Az f függvény monoton, tehát integrálható ezeken az intervallumokon, így felírhatjuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx\leq s_n\leq\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx.$$

Az integrálok kiszámítása, majd n-nel való szorzás után kapjuk, hogy

$$2\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq 2\left(\sqrt{n^2+n}-n\right),$$

ami pozitív egész n-ekre ekvivalens a következővel:

$$n\left(1-\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)\leq n\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)\leq$$

$$\leq n\left(1-\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}\right). \qquad (1)$$

Másrészről azonban

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)^2}=\frac{1}{4}, \qquad (2)$$

és

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} \cdot \left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}-2n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}. \qquad (3)$$

(1), (2) és (3) alapján, a „rendőr-elv" alkalmazásával kapjuk, hogy a keresett határérték $\frac{1}{4}$.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 6.

108. Tekintsünk $\frac{n(n+1)}{2}$ darab különböző valós számot, és véletlenszerűen rendezzük el őket egy számháromszögbe úgy, hogy a háromszög k-adik sorába pontosan k darab szám kerüljön ($k = 1, 2, \ldots, n$). Jelölje a k-adik sorban álló számok közül a legnagyobbat M_k. Mi a valószínűsége annak, hogy $M_1 < M_2 < \ldots < M_n$?

Megoldás: Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy az n sorból álló számháromszög sormaximumaira teljesül a kívánt egyenlőtlenség. A tekintett valós számok közül a legnagyobbnak az utolsó sorban kell lennie, ennek valószínűsége $\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}$. Annak a valószínűsége, hogy az első $n-1$ sor sormaximumai is teljesítik a megfelelő egyenlőtlenséget p_{n-1}. Így a keresett valószínűségre felírható a következő rekurzió:

$$p_n = \frac{2}{n+1} \cdot p_{n-1} \quad (n > 1) \text{ és } p_1 = 1.$$

Annak érdekében, hogy p_n -re csak n-től függő összefüggést nyerjünk, írjuk fel a rekurziós képletet 2-től n-ig minden pozitív egészre.

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot p_1$$

$$p_3 = \frac{2}{4} \cdot p_2$$

$$\vdots$$

$$p_{n-1} = \frac{2}{n} \cdot p_{n-2}$$

$$p_n = \frac{2}{n+1} \cdot p_{n-1}$$

A kapott $n-1$ egyenlet összeszorzása, majd egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$p_n = \frac{2^{n-1}}{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{2^n}{(n+1)!}.$$

A keresett valószínűség tehát $\frac{2^n}{(n+1)!}$.

Barczi Péter(Szeged) megoldása nyomán

A megoldók száma: 5.

109. Egy papírlapra fel van írva az első 100 pozitív egész szám növekvő sorrendben úgy, hogy bármely két szomszédos szám között van hely egy műveleti jel számára. Anna és Balázs felváltva (Anna kezd) beírnak a kimaradt helyek valamelyikére egy, a „+", „–", „×" jelek közül általuk választott műveleti jelet. A 99. lépés után a műveletek elvégzésével kapott számot jelölje S. Igaz-e, hogy Anna rögzíteni tudja S paritását, ha jól játszik?

Megoldás: Tegyük fel először, hogy Anna S-et párossá akarja tenni. Ekkor a következőképpen kell jól játszania: Az első lépésben az 1 és 2 közé beírja a szorzás „×" jelét. Ezután 98 műveleti jel számára marad hely. Az szomszédos helyekből képzett párok éppen az 1-től 100-ig megmaradt páratlan számokat fogják közre. Ezért a továbbiakban Balázs bárhova is tesz egy műveleti jelet, Anna az ezzel szomszédos páratlan szám másik oldalára a szorzás jelét írja. Így S valóban páros lesz, hiszen minden egyes páratlan szám szorzódik az egyik páros szomszédjával.

Ha Anna S-et páratlanná szeretné tenni, akkor első lépésben az 1 és 2 közé az összeadás jelét kell tennie, majd a továbbiakban a fent leírt módon játszania. Ekkor S-1 páros lesz, így S páratlan.

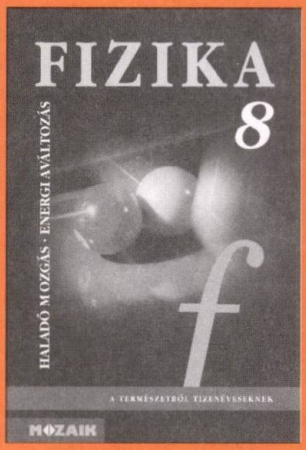
Anna tehát rögzíteni tudja S paritását.

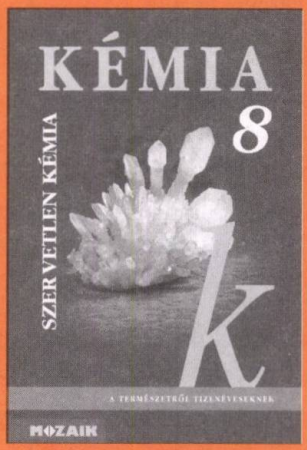
Bíró Bálint, Eger

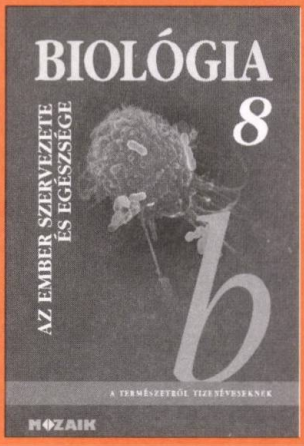
A megoldók száma: 9.

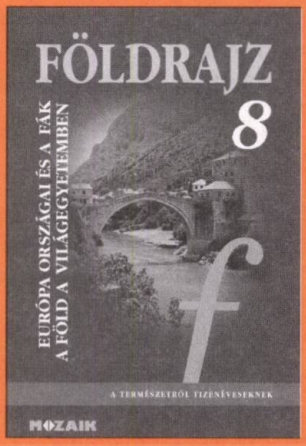
A megoldók névsora: Barczi Péter, Szeged (105., 107-109.); Bíró Bálint, Eger (105. 2 mód, 109.); Dályay Pál Péter, Szeged (105. 2 mód, 106. 2 mód, 107. 2 mód, 108., 109.); László Sándor, Szombathely (105., 109.); Marosszéky Gábor, Salgótarján (105., 106.); Schutzbach Mártonné, Siófok (105., 108.); Simon József, Csíkszereda (105., 107-109.); Tóth Sándor, Sárospatak (105-107., 109.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (105-107., 109.); Ványa István, Szeged (105., 106., 109.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (105-109.).

A TERMÉSZETRŐL
TERMÉSZETISMERET · BIOLÓGIA · FIZIKA · KÉMIA · FÖLDRAJZ
TIZENÉVESEKNEK









A Földrajz 8. és a Biológia 8. kötetek megjelenésével a Mozaik Kiadó népszerű tankönyvsorozata 5-8. osztályig teljessé válik. Minden tankönyv, munkafüzet és feladatlap megrendelhető az 1999/2000-es tanévre **az Oktatási Minisztérium megrendelőlapjának 124-127. oldalán.**

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 47-01-01, 470-052
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Új célok és eszközök a Pest Megyei Középiskolai Matematikaversenyen

(Ujvári István – Bartha Gábor)

VERSEGHY SZOLNOK KÖNYVTÁR

Beszámoló a VIII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyről

(Dr. Urbán János)

Beszámoló a tanárképző főiskolák 1999. évi „Péter Rózsa" matematikai feladatmegoldó versenyéről

(Blazsekné Licsár Ágnes)

VII. ÉVFOLYAM 1999 3

MAZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelő szerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 880 Ft.
A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Szegedi Kossuth Nyomdában
Felelős vezető: Gera Imre

TARTALOM

Új célok és eszközök a Pest Megyei Középiskolai Matematikaversenyen
Ujvári István
tanár, Vác
Bartha Gábor
tanár, Szentendre

Beszámoló a VIII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyről
Dr. Urbán János
tanár, Budapest

Beszámoló a tanárképző főiskolák 1999. évi „Péter Rózsa" matematikai feladatmegoldó versenyéről
Blazsekné Licsár Ágnes
egyetemi tanársegéd, Pécs

Hírek versenyekről

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny
Erkel Ferenc Gimnázium, Gyula
Marczis György
szaktanácsadó, BJMT Békés Megyei Tagozata titkára

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Ujvári István – Bartha Gábor

Új célok és eszközök a Pest Megyei Középiskolai Matematikaversenyen

A tanulmányi versenyek – a Pedagógiai Lexikon alapján – „az általános és középiskolában tanuló diákok kötelező tanórai elfoglaltságán kívül olyan tevékenységek, amelyek a tanulókat érdeklődési körüknek megfelelő témák mélyebb megismerésére, képességük, tehetségük kibontakoztatására, tudásuk más tanulókkal való összemérésére, kiemelkedő teljesítmények elérésére ösztönzik." E definíciónak minden bizonnyal megfelelnek nagy múltú középiskolai matematikaversenyeink.

Nem vitatható, hogy az idő próbáját csak jó versenyforma bírhatja ki. Ilyenek a konzervatívnak nevezhető OKTV és Arany Dániel matematikaversenyek. Ez abból is látszik, ahogyan a kiválasztás funkcióját teljesítették: győzteseik, helyezettjeik későbbi pályafutása ezt igazolja. Szükséges tehát megtartásuk és hagyományaik ápolása. Idővel azonban ott leselkedik a veszély, hogy még a jó értelemben vett hagyomány ápolása sem segíti a fejlődést, ha nem párosul, nem színesedik más jellegű – az újfajta követelményeknek és igényeknek megfelelő – „modernebb" versenyformákkal. Márpedig az iskolarendszer változásai, a mind intézményesebbé váló tehetséggondozás és a társadalmi elvárások nemcsak a kötött versenyformában, lényegében hosszú idő óta változatlan szabályok keretei között történő minőségkiválasztást teszik szükségessé, hanem a szélesebb körű tehetségkutatást, -gondozást, a variábilis és minőségi képzést, valamint a kreatív, alkotó, alkalmazható tudás megszerzését is. Ezért van szükség a hagyományos versenyek mellett újszerű, új célokat kitűző és modern eszközök használatára épülő versenyformák kidolgozására is. Ilyen elgondolás jegyében indult útjára 1992-ben a Pest Megyei Középiskolai Matematikaverseny, melynek célkitűzéseit taglaljuk a következőkben a hagyományos versenyek tükrében, illetve „ellenében".

1. A hagyományos versenyek nem indítják elég széles alapról a tehetségkiválasztást, hiszen e versenyeknek csak részben feladata a tehetségkutatás, sokkal inkább a tehetséges – sőt az igazán tehetséges, eleve versenyszintű – tanulók közül a legjobbak kiválasztása. A célkitűzés korrekt teljesítése mellett – hiszen „jogilag" az első fordulóban mindenki részt vehet – azonban sok tehetséges gyerek már el sem indul. (Gondoljunk csak a szakközépiskolások és a kevésbé frekventált gimnáziumok tanulóinak tömegeire.) Szükséges tehát a rejtett, de még nem „versenyképes" tehetségek tömeges felkutatását is megcélzó versenyek létrehozása.

2. Országos szinten relatíve kevés tanuló jut el a második fordulóba. (Különösen igaz ez a szakközépiskolai kategóriákban.) Az 1894-ben indított első matematikai tanuló versenyen (a mai Kürschák verseny elődjén) még csak a két legjobb dolgozat szerzője részesült pénzjutalomban. Bár később a jutalmazottak száma nőtt (elsősorban a kategóriák szaporításával), az alapvető cél nem változott: az **egészen kiválók** felkutatása. Ma már az országos versenyeken rangsorolják ugyan az első 10, 20 vagy 30 helyezettet is, ez azonban még mindig kevés annak a társadalmi igénynek a kielégítéséhez, mely szerint a megfelelő cél inkább a jövő mérnökeinek, közgazdászainak (akiknek jelentős része szakközépiskolai tanuló), tehát egy szélesebb rétegnek a kiválogatása lehetne, hogy idejében erősebb matematikai képzést kapjanak. Hiszen sokkal több mérnökre és közgazdászra van szüksége gazdaságunknak, mint alkotó matematikusra. Az érvényben lévő versenyrendszer mellett tehát indokolt új célokat kitűző és megvalósító versenyek rendezése.

3. Az első forduló értékelése során a szubjektív elemek kiküszöbölését tűzzük ki célul. Ez megfelelő feladatsorokkal megvalósítható. Még a tesztjellegű feladatsorok alkalmazásánál is jobbnak tartjuk az első fordulóban az úgynevezett **számválaszos** feladatsort, mellyel sikerült kiküszöbölni a „helyi" szaktanári javítás szubjektív elemeit, a gyakran előforduló felülértékelést.

4. Az országos (hagyományos) versenyeken a hosszú időt igénybe vevő értékelés miatt az eredményhirdetés elhúzódik. A háromszintű értékelés következtében van olyan verseny (pl. az Arany Dániel), melynek eredményhirdetése még a tanévzáróig is elhúzódik, ami csökkenti a várakozást, a verseny veszít érdekességéből. Tudjuk a tanári gyakorlatból, hogy még egy dolgozatjavítási óra hasznossága is az írás és javítás közt eltelt idő függvénye, ami áll a versenyekre is. Ezen próbál segíteni az új célkitűzéseknek megfelelő, a későbbiekben ismertetendő kiegészítést szolgáló új versenyforma.

5. Már eléggé közismert a Ranzulli-féle tehetségdefiníció, melyben a kreativitás egyenértékű az intelligenciával, és nagy szerepe van a motivációnak is. A hagyományos feladatsorok azonban ebből a hármasból legfeljebb az egyik mérésére alkalmasak. (Kivéve a KÖMAL-feladatokat, melyekkel a jó matematikai ismeretekkel rendelkező, egyúttal kreatív és szorgalmas tanuló tud csak eredményesen foglalkozni.) Divergens gondolkodást igénylő feladatokra – melyek a kreativitást mutatják – nagy szükség lenne a hagyományos versenyeken is, ezekkel szelektálni is lehetne, főleg a döntő fordulókban.

6. A hagyományos versenyek egyéni versenyek, bár meglehetősen iskolafüggők, mégsem tudnak képet adni egyes területegységek, azon belül pedig egyes iskolák matematikai tehetséggondozásának hatékonyságáról. Ezt a feladatot országos versenyeink nem is vállalhatják fel. Éppen ezért kell a regionális szintű új kezdeményezéseknek a tehetséggondozás ügyét kiemelten felkarolni. Tudomásul kell vennünk, hogy mérésre, megmérettetésre, iskolák közötti reális rangsor kialakítására nem csak egy-egy szempontból van szükség. Ha az országos versenyeken nemcsak a csúcsra jutottak kerülnének reflektorfénybe, hanem a dicsőségből több hárulna a továbbjutókra, akkor pontosabb lehetne az iskolák munkájáról alkotott képünk. Jelenlegi gyakorlatunk szerint ugyanis 1-2 kiemelkedő tanulói teljesítmény (amelyhez esetleg nem sok köze van iskolának) elfeledteti a tehetséggondozó munka hiányosságait.

Az Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ évekkel ezelőtt a fenti meggondolásokon alapuló új célkitűzéseket fogalmazott meg, és egy formájában és eszközeiben **új** versenyformát hozott létre. Az idén hetedízben megrendezett Pest Megyei Középiskolai Matematikaversenyen éves átlagban 1000–1200 tanuló vesz részt mintegy 30-35 középiskolából a november végi első (iskolai) fordulóban. Ezek közül – 90 perces számválaszos feladatsor alapján – 8 kategóriában (gimnáziumi, ill. szakközépiskolai, I–II–III–IV. évf.) 60-65 tanulót hívunk meg a Vácon megrendezésre kerülő döntőre, ahol már 5 – konstruktív feladatokból álló – feladatsort kapnak. Kategóriánként 3, összesen tehát 24 tanuló kap könyvcsomagot és díszoklevelet. Úgy gondoljuk, hogy ezzel a versenyformával lényegében megoldottuk korábban vázolt elképzeléseinket, hiszen

1. a verseny nagy tömegeket mozgat meg;
2. a második fordulóban minden résztvevő iskolának legalább egy tanulóját meghívjuk (ezt külön versenyszabály biztosítja);
3. könnyen, gyorsan és objektíven értékelhetők a dolgozatok;
4. a döntő napján, a dolgozat befejezését követő 3 óra múlva már eredményt hirdetünk;
5. a versenykiírásban rögzítjük, hogy a döntő 3 feladata közül **egy** divergens gondolkodást igénylő, kettő pedig megnevezett feladatgyűjteményben található. Ezzel biztosítjuk a tanulói kreativitás, ill. motiváció (szorgalom, kitartás) érvényre jutását és mérésének lehetőségét.
6. 7 év összesített tapasztalatai alapján pontosan ismerjük azokat a gimnáziumokat és szakközépiskolákat, ahol kiválóan, ill. jól foglalkoznak a matematikában tehetséges gyerekekkel, de azokat is, ahol a tehetséggondozó munka hiányosságait azzal próbálják leplezni, hogy ezt a versenyt negligálják.

Összefoglalva: **kevesebb** tanári munkával **nagy** tömegeket versenyeztetünk, s ezekből **megalapozottan** választjuk ki a matematikában tehetséges tanulókat.

A továbbiakban bemutatjuk az 1998. évi verseny I. fordulójának számválaszos feladatsorát, melyet – számkeresztrejtvény formájában – Bartha Gábor (Szentendre, Móricz Zsigmond Gimnázium) készített, valamint a keresztrejtvény megoldási ábráját. Terjedelmi okokból itt mellőznünk kell a feladatok részletes megoldását, a második forduló feladatsorát, az értékelés tapasztalatait és a díjazottak névsorát. Ezeket, valamint az 1997. évi teljes versenyanyagot füzetben kívánjuk megjelentetni a Kis Váci Matekfüzetek sorozatban, s ebből e lap érdeklődő olvasóinak is szívesen küldünk. (Címünk: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő. 2600 Vác, Konstantin tér 6.)

I–IV. évfolyam
(a középső részhez)

Vízszintes:

A) Odafelé olvasva négyzetszám, visszafelé olvasva prímszám, a számjegyek összege pedig négyzetszám.

B) Az olyan 10 000-nél nagyobb ötjegyű számok száma, amelyek 2-vel vagy 3-mal oszthatók.

C) Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle és magassága is 210 egységnyi. Mekkora a gúlába írható kocka térfogata?

D) Egy 134 és 90 egység alapú húrtrapézba r sugarú kör írható. Mekkora $(2r)^2$ értéke?

E) Az „n" szám értéke, ha $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 5050$.

Függőleges:

A) Ez a 9-cel osztható szám 73-mal és 89-cel osztva is 30 maradékot ad.

B) Ez a szám két pozitív egész kilencedik hatványainak különbségeként írható fel.

F) Ennyi pozitív egészekből álló számhármas elégíti ki az $x + y + z = 2000$ egyenletet.

G) Ennyi oldala van annak a szabályos sokszögnek, amely $\frac{14}{43}$ – és $\frac{4}{9}$ fokonként is forgásszimmetrikus.

H) Egy 82 cm átfogójú derékszögű háromszög kerülete 184 cm. Hány cm^2 a területe?

I. évfolyam

Vízszintes:

a) Hol metszi az y tengelyt az az egyenes, amely átmegy a (14; 20) és a (15; –230) ponton?

b) Az $x^2 - y^2 = 1997^{1996}$ egyenlet pozitív egész megoldásainak száma.

c) Ez a szám a számjegyek felcserélésével kapott szám 5-szörösénél 4-gyel kisebb.

Függőleges:

a) Ha $a^2 + b^2 + c^2 = 4 \cdot (a - 2) - 8b + 12 \cdot (c - 4)$, akkor mekkora $333(a - b + c)$ értéke?

d) E háromjegyű szám jegyeinek szorzata a számjegyek összegének háromszorosa. A számot visszafelé olvasva pedig 1 híján egy négyzetszámot kapunk.

e) Egy olyan „tökéletes szám", amelyre igaz, hogy osztóinak összege az adott szám kétszerese.

II. évfolyam

Vízszintes:

f) Ha $x + \frac{1}{x} = \sqrt{59}$, akkor mekkora $x^4 + \frac{1}{x^4}$?

g) Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle = 31°$. A beírt kör K középpontja és az A és B csúcs köré írt kör O középpontjából hány fokos szögben látszik az AB oldal?

h) Mekkora az „a" paraméter értéke, ha az $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$ egyenlet gyökeinek különbsége $\frac{a^2}{6}$?

Függőleges:

i) Ennyi darab egész számra értelmezhető a $\sqrt{\frac{x - 5\sqrt{x}}{5 - x}}$ kifejezés.

j) Egy derékszögű háromszög befogói 28 és 84 egység hosszúak. Mekkora annak a négyzetnek a területe, melynek csúcsai a háromszög kerületén vannak?

k) Egy téglatest egy csúcsból induló lapátlói $\sqrt{39}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{41}$ egység hosszúak. Mekkora a test térfogatának négyzete?

III. évfolyam

Vízszintes:

l) Egy k és egy n oldalú szabályos sokszög átlóinak száma együttesen 89. Mekkora $k+n$ értéke?

m) Az x és y pozitív egészek szorzata 150. Mekkora az $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$ kifejezés maximuma?

n) Egy szabályos háromszög oldalait 7-7 egyenlő részre osztottuk. Hány háromszöget határoznak meg összesen az osztópontok és a háromszög csúcsai?

Függőleges:

l) Az $5^{\log_{16} x}+5^{\log_{16} x-1}=3^{\log_{16} x+1}+3^{\log_{16} x-1}$ egyenlet gyöke.

m) Egy paralelogramma oldalai $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3{,}5}$ egység hosszúak. Mekkora az átlók négyzetösszege?

o) Az $x^2-y^2=4^{30}\cdot 9^{37}$ pozitív egész megoldásainak száma.

IV. évfolyam

Vízszintes:

p) Ez az a legnagyobb prímszám, amely $(n^{12}-n^2)$-nek bármely n pozitív egész szám esetén osztója.

r) 10^{44}-nek ennyi olyan osztója van, amely négyzetszám is.

s) Egy számtani sorozat második száz tagjának összege 854. Mekkora az első háromszáz tag összege?

Függőleges:

t) Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle a, testmagassága m, a szomszédos oldallapok pedig 120 fokos szöget zárnak be egymással. Mekkora a kiegészítő gúla térfogata, ha $\frac{a-2m}{12}=\sqrt[3]{4}$?

u) Egy pozitív tagú mértani sorozat első n tagjának összege 15 625, a tagok reciprokának összege pedig 1. Mekkora az első és utolsó tag mértani közepe?

v) Mekkora c értéke, ha az $x^3-52x+c=0$ egyenlet gyökeinek összege 0, a gyökök reciprokának összege pedig $\frac{13}{24}$?

Tájékoztató

Kedves Versenyző!

A Pest Megyei Középiskolai Matematikaverseny I. fordulójából számválaszos feladatok helyes megoldásával lehet a döntőbe kerülni. Erről a még kevésbé ismert feladattípusról most elegendő annyit tudnod, hogy megoldása egy természetes szám. Csak ezt kell megadnod, a részletszámításokat nem kérjük.

A feladatok végeredményét a túloldali számkeresztrejtvény megfelelő négyzeteibe kell írnod, mégpedig mindegyikbe egy-egy számjegyet. Nem kell valamennyi feladattal foglalkoznod, csupán azzal a hattal, amely az évfolyamjelzésed melletti sarokban van. Ha ezekkel sikeresen megbirkóztál, és még időd is van, akkor a középső résznek fogj neki, mert ennek akár részleges megoldása is dönthet a holtversenyek esetében.

Azt ajánljuk, hogy először ceruzával töltsd ki a mezőket, majd számaidat a dolgozat beadása előtt írd át tollal.

Eredménylap

I. évfolyam II. évfolyam

a 3	d 5	e 2	0	■	f 3	i 2	j 4	k 7
b 9	9	8	■	F 1	■	g 1	4	9
c 9	1	■	A 1	9	G 6	■	h 1	8
6	■	B 5	9	9	9	H 9	■	0
■	C 1	1	5	7	6	2	5	■
t 1	■	D 1	2	0	6	0	■	o 2
p 1	u 1	■	E 1	0	0	■	l 2	2
r 5	2	v 9	■	1	■	m 1	5	1
s 2	5	6	2	■	n 1	1	6	2

IV. évfolyam III. évfolyam

A középső rész: I–IV. évfolyam

Urbán János

Beszámoló a VIII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyről

A VIII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyt 1999. március 25-29-ig Debrecenben a Fazekas Mihály Gimnázium rendezte. A szervezők, Aranyi Imre igazgató és Balázs Tivadar matematikatanár, főszervező vezetésével gondoskodtak arról, hogy a hazánkból és a környező országokból érkezett, több, mint 250 versenyző diák és kisérő tanár jól érezze magát.

A verseny szakmai hátterét, színvonalának biztosítását a Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézetének oktatói is segítették: a feladatok összeállítását, a zsűri munkájának irányítását végezték. A bírálóbizottság elnöke Lajkó Károly egyetemi docens volt.

Az eddigi versenyek anyagát könyv alakban jelentették meg Kántor Sándorné és Kántor Sándor.

Az ünnepélyes megnyitó március 26-án az Arany Bika szálló dísztermében, a Bartók Teremben volt. Ugyanezen a napon délután a Kossuth Lajos Tudományegyetemen Daróczy Zoltán akadémikus tartott „Nevezetes valós számok" címmel nagy érdeklődéssel kísért előadást.

A versenydolgozatot a diákok március 27-én délelőtt 9-től 13 óráig írhatták, amelyeket a bírálóbizottság 27-én délután értékelt.

Vasárnap, március 28-án a szervezők érdekes, tartalmas autóbuszos kirándulásokat biztosítottak a résztvevőknek. A választási lehetőség: Eger, Sárospatak, Hortobágy, Szatmári körút.

A záróünnepély és a díjkiosztás március 29-én 10 órakor került megrendezésre a Bartók Teremben.

Az egyes évfolyamok eredménye:

9. évfolyam:

I. díjas: Kovács Erika Renáta, Budapest

II. díjasok: Erdei Zsuzsa, Hajdúszoboszló
Horváth Illés , Budapest

III.díjasok: Balogh János, Kaposvár
Tóth Ágnes, Hajdúszoboszló

10. évfolyam:

I. díjasok: Ambrus Gergely, Szeged
Pesti Gábor, Nagykanizsa

II. díjasok: Baka Nóra, Kaposvár
Vörös László, Győr

III. díjasok: Ritter Ádám, Budapest
Deli Lajos, Hajdúszoboszló

11. évfolyam:

I. díjasok: Keszegh Balázs, Budapest
Tóth Ferenc, Beregszász

II. díjasok: Demeter Albert, Székelykeresztúr
Balázs Péter, Kaposvár

III. díjasok: Bernád József, Sepsiszentgyörgy
Kelemen Zoltán, Kolozsvár

12. évfolyam:

I. díjasok: Végh László, Debrecen
Lukács László, Miskolc
Hegedűs Péter, Miskolc

II. díjasok: Huszár Péter, Komárom
Papp Júlia, Debrecen

III. díjasok: Horváth Gábor, Debrecen
Devecsery András, Budapest
Fehér Károly, Debrecen.

A versenyen a következő feladatokat tűzték ki:

9. osztály

1. Milyen p és q prímszámokra teljesül a $3(p^2 - q) = q^2 - p$ egyenlet?

Oláh György (Komárom)

2. Az ABC háromszögben $AC = BC$ és $ABC\sphericalangle = BAC\sphericalangle = 40°$. A BAC szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AD + DC = AB$.

Szabó Magda (Szabadka)

3. Az $ABCD$ érintőnégyszög (A és C átellenes csúcsok) beírt körének középpontja O, sugara r. Az ABO és a CDO háromszögek köré írt körének sugara r_1, illetve r_2. Bizonyítsuk be, hogy r nem lehet nagyobb r_1-nél is és r_2-nél is!

Kántor Sándor (Debrecen)

4. A valós számok halmazában értelmezett $\circ$ műveletre (amelynél bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $(x \circ y) \in \mathbb{R}$) minden x, y, z valós szám esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$x \circ y = y \circ x$$
$$(x \circ y)z = (xz) \circ (yz)$$
$$(x \circ y) + z = (x + z) \circ (y + z).$$

Mennyi $1999 \circ 2000$?

Kántor Sándorné (Debrecen)

5. Egy téglalap oldalai 37 és 54 egységnyiek. Vegyünk fel a téglalapon (a belsejében vagy a kerületén) 1999 pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok bármilyen választása esetén lesz közöttük legalább három, amely lefedhető egy $\frac{9}{4}$ átmérőjű körlappal!

Benedek Ilona (Vác)

6. Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok úgy, hogy $1 \le x_i \le n^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $1 \le i < j \le n$ esetén $x_j - x_i \ge j + i$. Határozzuk meg az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat!

Bencze Mihály (Brassó)

10. osztály

1. Bizonyítsuk be, hogy $1997^{1999} + 1999^{1997}$ osztható 3996-tal!

Benedek Ilona (Vác)

2. Az $ABCD$ trapéz csúcsai egy körre illeszkednek. A trapéz AD és BC szárainak meghosszabbításai az M pontban metszik egymást. A körhöz a B, illetve D pontokban húzott érintők metszéspontja N. Bizonyítsuk be, hogy $MN \| AB$!

Neubauer Ferenc (Munkács)

3. Határozzuk meg az m valós paraméternek azokat az értékeit, amelyekre a

$$9mx(3x - 1)(3x - 2)(x - 1) = 1$$

egyenletnek négy (nem feltétlenül különböző) valós gyöke van!

Péter András (Arad)

4. Adott az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében a P pont úgy, hogy $PA = 6$, $PB = 8$, $PC = 12$. Határozzuk meg az ABC háromszög területét!

Kántor Sándorné (Debrecen)

5. Legyenek $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ valós számok. Határozzuk meg az

$$x,\ y + \frac{1}{z},\ z + \frac{1}{x} \text{ és } \frac{1}{y}$$

számok legkisebbikének lehető legnagyobb értékét!

András Szilárd (Kolozsvár)

6. Hány részre osztják fel a síkot egy 1999 oldalú szabályos sokszög oldalegyenesei?

Oláh György (Komárom)

11. osztály

1. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek négyzete is és köbe is ugyanezzel a háromjegyű számmal végződik?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

2. Tekintsük az összes olyan $P(x; y)$ pontot, amelynek koordinátáira

$$x^2y^2 + x^2 - 10xy - 8x + 16 = 0$$

teljesül. Milyen értékeket vehet fel az xy szorzat?

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós $p(x)$ polinomot, amelyre minden valós x esetén teljesül az

$$x \cdot p(x) \cdot p(1 - x) + x^3 + 100 \geq 0$$

egyenlőtlenség!

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

4. Legyen S az ABC hegyesszögű háromszög súlypontja, és r a háromszög köré írt kör sugara. Bizonyítsuk be, hogy

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 > \frac{8r^2}{3}!$$

Oláh György (Komárom)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasz merőleges mindkét élre!

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

6. Igazoljuk, hogy ha $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 3)$ különböző pozitív egész számok, akkor

$$\frac{1}{x_1^3} + \ldots + \frac{1}{x_n^3} < \frac{11}{8} - \frac{1}{2n(n-1)}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

12. osztály

1. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $PAB\sphericalangle = PBC\sphericalangle = PCA\sphericalangle$. Mivel egyenlő a PAB szög tangensének értéke, ha $AB = 13$, $BC = 14$ és $AC = 15$?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

2. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden x és y értékre kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$f(x) \leq x,$$
$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számra $f(x) = x$.

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. Oldjuk meg a kővetkező egyenletet, ha x és y egész számok:

$$x^3 - 23x^2 - 23y^2 + y^2x + 2x = 1849.$$

Bíró Bálint (Eger)

4. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 1997^{1999} szám számjegyeinek az összege, B pedig az A számjegyeinek az összege. Számítsuk ki B számjegyeinek az összegét!

Boros Zoltán (Debrecen)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor létezik olyan P pont a térben, amelyből az ABC háromszög bármely csúcsát a szemközti oldalegyenes bármely pontjával összekötő szakasz derékszögben látszik!

Kántor Sándor (Debrecen)

6. Legyenek $a > 0$ és $b > 0$ adott valós számok, valamint

$$f(x, y, z) = \max\left\{ax + \frac{b}{y}, ay + \frac{b}{z}, az + \frac{b}{x}\right\}$$
$$(x > 0, y > 0, z > 0)$$

Igazoljuk, hogy az f függvénynek van minimuma, és határozzuk meg ezt a minimumot!

Szász Róbert és Dáné Károly (Marosvásárhely)

Blazsekné Licsár Ágnes

Beszámoló a tanárképző főiskolák 1999. évi „Péter Rózsa" matematikai feladatmegoldó versenyéről

A versenyt ez évben április 1-jén és 2-án a Pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem Természettudományi Karán rendezték. A vendéglátó intézményen kívül a:z ELTE Tanárképző Főiskolai Karát (Budapest), az Eszterházy Károly Tanárképző Főiskolát (Eger), a Bessenyei György Tanárképző Főiskolát (Nyíregyháza), a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolát (Szeged) és a Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskolát (Szombathely) a versenyen 5-5 hallgató képviselte.

A versenybizottság elnöke dr. Urbán János volt.

A versenyt az első nap délelőttjén bonyolították le. A kitűzött hét feladat megoldására, melyet az intézmények által javasoltakból a versenybizottság elnöke választott ki, a versenyzők öt órát fordítottak. A második napon a versenyfeladatok megoldásának ismertetése után ünnepélyes eredményhirdetés zárta a programot.

Részletes eredmények

I. díjban részesült
Mándy Attila (Budapest)
Molnár Tamás (Budapest)
Erdei Csaba (Nyíregyháza)

II. díjban részesült
Kelemen Zsolt Gábor (Budapest)
Nyeste Emília (Nyíregyháza)

III. díjban részesült
Tóth István (Nyíregyháza)
Hódosi Péter (Eger)
Illés Marianna (Pécs)

Dícséretben részesült 9 versenyző.

A kitűzött feladatok és megoldásuk

1. feladat

Számítsuk ki a [0; 1] intervallum olyan részintervallumai hosszának összegét, amelyekbe tartozó számok tizedestört alakjában van 1 számjegy!

Megoldás:

A k-adik helyen először egyes számjegy a $(0, a_1a_2...a_{k-1}1;\ 0, a_1a_2...a_{k-1}2)$ típusú intervallumokban szerepel, ahol $0 \le a_i \le 9$ egész és nem 1. Ilyen intervallum 9^{k-1} van, hiszen az első $k-1$ helyen a 9 számjegy bármelyike lehet (1 nem). Egy ilyen intervallum hossza $\frac{1}{10^k}$, az összesé $\frac{9^{k-1}}{10^k}$. Az első egyes lehet az 1, 2, ..., k, ... helyeken, tehát az összhossz

$$s = \frac{9^0}{10} + \frac{9^1}{10^2} + \frac{9^2}{10^3} + ... + \frac{9^{k-1}}{10^k} + ... = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{9}{10}} = 1.$$

(Mértani sor, kvóciense $0 < \frac{9}{10} < 1$).

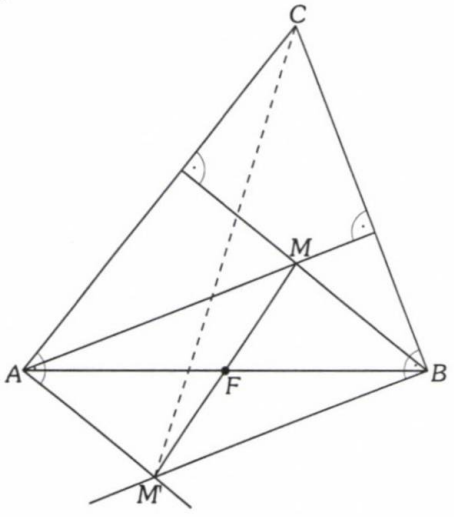
2. feladat

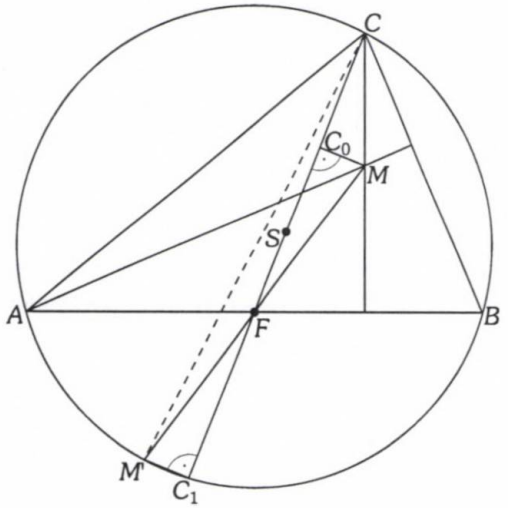
Egy ABC hegyesszögű háromszög A, B, C csúcsaiból kiinduló súlyvonalegyenesek a háromszög köré írt kört messék még a további A_1, B_1, C_1 pontokban. Ezeket tükrözve a hozzájuk tartozó oldal felezőpontjára kapjuk az A_0, B_0, C_0 pontokat. Mutassuk meg, hogy A_0, B_0, C_0 az S súlyponttal húrnégyszöget alkot!

Felhasználható előismeret: az M magasságpontnak a háromszög AB oldalának felezőpontjára vonatkozó M' tükörképe a háromszög

köré írható körön van, mégpedig M' a C-ből induló átmérő másik végpontja.

Bizonyítás: Az F felezőpontra tükrözve az AM egyenes a BM'-be megy át. $AM \parallel BM'$ és $AM \perp BC$ miatt $BM' \perp BC$ azaz B-ből a CM' szakasz derékszög alatt látszik. Hasonlóan: CM' az A-ból is derékszög alatt látszik. Emiatt A, B rajta vannak a CM' (Thálész) körön. Ezt a kört: A, B, C, M' körét három pontja már meghatározza, így a kör az ABC háromszög köré írható kör.





A feladat megoldása:

Megmutatjuk: A_0, B_0, C_0 rajta van az MS átmérőjű Thalész körön. Megmutatjuk például C_0-ra: Ha M' az M magasságpontnak az AB oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképe, akkor CM' átmérő, így C_1-ből az 90° alatt látszik. $M'C_1 \perp CC_1$-ből a tükrözés $M'C_1 \parallel MC_0$ tulajdonsága miatt $MC_0 \perp CC_1$ következik, azaz C_0-ból MS 90° alatt látszik.

3. feladat

Igazoljuk, hogy

$$1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \sqrt[n]{\frac{2n^n}{n+1}}.$$

Megoldás:

Írjuk át az egyenlőtlenséget a következő alakra

$$\frac{n}{1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{2}}$$

A harmonikus, a mértani és a számtani közép egyenlőtlenség szerint

$$\frac{n}{1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} \leq \sqrt[n]{1\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n}} =$$

$$= \sqrt[n]{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n(n+1)}{2n}} = \sqrt[n]{\frac{n+1}{2}}.$$

4. feladat

Ernő teniszkarrierjét biztosítandó, az apja díjat ajánlott fel, ha megnyer két egymás utáni meccset egy hármas sorozatból, melyet felváltva játszik az apjával és a klub bajnokával (aki jobb az apánál). Ernő választhat, hogy bajnok-apa-bajnok vagy apa-bajnok-apa sorozatot játszik. Melyiket válassza?

Megoldás:

Legyen a annak valószínűsége, hogy Ernő legyőzi az apját, b annak valószínűsége, hogy legyőzi a bajnokot. Mivel a bajnok erősebb az apánál, $a > b$.

Ha bajnok-apa-bajnok sorozatot játszik, a díj elnyerésének valószínűsége

$$bab + ba(1-b) + (1-b)ab = ab(2-b),$$

ha pedig az apjával kezdi, akkor

$$aba + ab(1-a) + (1-a)ba = ab(2-a).$$

Mivel $a > b$, ezért $2 - a < 2 - b$, tehát Ernő nagyobb eséllyel nyeri el a díjat, ha a bajnokkal kezd.

5. feladat

Legyen $a_0 := 5$ és $a_{n+1} := a_n + \frac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, ...)$. Bizonyítsuk be, hogy $45 < a_{1000} < 45{,}1$!

Megoldás:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n^2 = \sum_{n=1}^{k}\left(a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2}\right) \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

amiből

$$(1) \qquad a_k^2 = 25 + 2k + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{a_n^2} \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Ebből

$$a_{1000}^2 = 2025 + \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{a_n^2} > 2025 = 45^2$$

$$a_{1000} > 45.$$

Hasonlóan

$$a_{100}^2 = 225 + \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{a_n^2} > 225,$$

másrészt, mivel $\langle a_n \rangle$ szigorúan monoton növekvő, így

$$\sum_{n=0}^{999} \frac{1}{a_n^2} = \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{a_n^2} + \sum_{n=100}^{999} \frac{1}{a_n^2} <$$

$$< \frac{100}{a_0^2} + \frac{900}{a_{100}^2} < \frac{100}{25} + \frac{900}{225} = 8$$

(1) alapján

$$a_{1000}^2 < 45^2 + 8$$

$$a_{1000} < 45{,}1.$$

6. feladat

A $p(x)$ másodfokú valósegyüttható polinomról tudjuk, hogy $|p(x)| \le 1$, ha $x \in [0; 1]$. Melyik az a legkisebb K valós szám, amelyre teljesül, hogy $|p'(0)| < K$?

Megoldás:

Legyen az adott valós együtthatós polinom:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

A feltétel szerint:

$$|p(0)| = |c| \le 1, \text{ tehát}$$

$$(1) \qquad -1 \le c \le 1,$$

$$|p(1)| = |a + b + c| \le 1, \text{ tehát}$$

$$(2) \qquad -1 \le a + b + c \le 1,$$

$$\left|p\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right| \le 1, \text{ tehát}$$

$$(3) \qquad -1 \le \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \le 1.$$

(2)-ből:

$$(4) \qquad -1 \le -a - b - c \le 1,$$

(3)-ból:

$$(5) \qquad -4 \le a + 2b + 4c \le 4,$$

(1)-ből:

$$(6) \qquad -3 \le -3c \le 3.$$

A (4), (5) és (6) egyenlőtlenségrendszer megfelelő oldalait összeadva kapjuk:

$$-8 \le b \le 8,$$

azaz

$$|p'(0)| = |b| \le 8.$$

A becslés nem javítható, ezt például a $p_1(x) = 8x^2 - 8x + 1$ polinom mutatja, amely kielégíti a feltételt $\left(p_1(x) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right)$ és $p'(0) = -8$.

7. feladat

Adott a síkon n db pont, melyek között nincs három kollineáris (azaz nincs három, mely egy egyenesre esne), és nincs négy, mely egy körön lenne. Minden ponthármas köré köröket írunk. Mutassuk meg, hogy a körök között levő egységsugarú körök száma legfeljebb $\frac{n(n-1)}{3}$.

Megoldás:

Vegyük észre azt, hogy a pontok közül bármely két pontra legfeljebb két egységsugarú kör illeszkedik. Az n pontból $\binom{n}{2}$ db pontpár választható, ekkor legfeljebb $2 \cdot \binom{n}{2}$ egységsugarú kört tudunk megszámolni, azonban így minden kört 3-szor számoltunk. Ezért az egységsugarú körök száma legfeljebb $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \binom{n}{2} =$

$$= \frac{n(n-1)}{3}.$$

HÍREK VERSENYEKRŐL

Április 10-én rendezték meg országszerte a TIT Kalmár László Matematika Verseny megyei fordulóját. A 3. és 4. osztályosok versenye itt véget ért, az 5-8. osztályosok számára az országos döntőbe jutás a tét.

A versenyen kitűzött feladatokat közöljük, majd a javítási útmutatókat is közreadjuk.

A 3-4. osztályosok feladatait Brenyó Mihály, az 5-8. osztályosokét Urbán János állította össze:

3. osztály

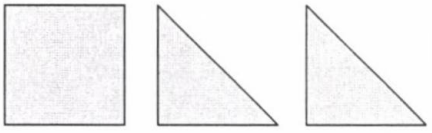
1. Dani azt állítja, hogy 4 darab 4-es számjeggyel és műveleti jelekkel – esetleg zárójelekkel is – eredményként előállítja az iskolai osztályzatokat. Mutasd meg, hogy igaza van!

2. Egy toronyóra számlapja négy színnel – piros, fehér, zöld és kék – van kifestve. Egy nap alatt mennyi ideig van mindkét mutató egyszerre a fehér mező felett?

3. Melyik az a háromjegyű szám, amelynél az egymást követő számjegyek különbsége három, s visszafelé írva olyan számot kapunk, amely 78-cal nagyobb, mint az eredeti szám háromszorosa?

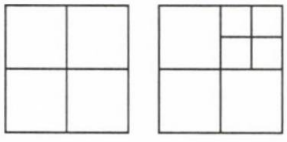
4. Bence és Zsóka katicabogarakat gyűjtenek. Bence csak kétpöttyöst, Zsóka csak hétpöttyűt. Bencének öttel több a katicája, mint Zsókának. Összesen 100 pöttyöt számoltak össze a katicákon. Zsókának hány darab hétpöttyös katicája van?

5. Színes papírból két azonos méretű négyzetet vágtam ki. Az egyiket két háromszögre bontottam.



A három alakzatból raktam össze különböző síkidomokat úgy, hogy a négyzet és a háromszögek mindig pontosan egy teljes oldalukkal kapcsolódnak egymáshoz!
Rajzold meg ezeket! (Két síkidom különböző, ha kivágva nem helyezhetők pontosan egymásra.)

6. Egy négyzetet felbontok négy kisebb négyzetre, majd kiválasztok közülük egyet, és azt is felbontom négy kisebb négyzetre. Ezt az eljárást sokáig folytatva elmondhatom-e valamikor, hogy pontosan 1999 darab négyzetre bontottam az eredeti négyzetet? Válaszodat indokold!

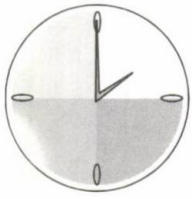


4. osztály

1. Nyírfakéregre írva maradt ránk a következő hindu feladat:
„Négy ajándékozó közül a második kétszer annyit adott, mint az első, a harmadik háromszor annyit, mint a második, a negyedik négyszer annyit, mint a harmadik. Négyen együtt 132 ajándékot adtak. Hányat adtak külön-külön?"
Te hogyan oldod meg?

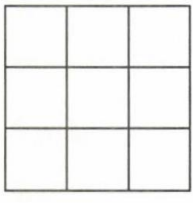
2. Add össze a páros számjegyekből álló kétjegyű számokat!
Mennyi az összeg?

3. Egy hagyományos óra számlapja négy színnel – piros, fehér, zöld és kék – van kifestve. Egy nap alatt mennyi az az idő, amíg a kismutató a fehér mező felett látható és ugyanakkor a nagymutató a kék mező felett halad?



4. Azonos számjegyekkel – legfeljebb 11 darab – műveleti jeleket is használva írd le az 1999-et (zárójelet ne használj!)

5. Kilenc darab egybevágó kis négyzetből egy nagy négyzetet állítottam össze. Vegyél el egy négyzeteket úgy, hogy a maradókból létrejött síkidom kerülete azonos legyen a négyzet kerületével (a kisnégyzet oldala 1 egységnyi)! A megmaradó kis négyzetek mindegyike legalább egy teljes oldallal illeszkedjen egy másikhoz. Keress minél több különböző megoldást!
(Két síkidom különböző, ha kivágva nem helyezhetők egymásra.)



6. Bence és Zsóka két- és hétpöttyös katicabogarakat fogtak, és azokon összesen 99 pöttyöt számoltak meg. Érdekes – mondja Zsóka – nekem ugyanannyi a hétpöttyös katicám, mint a te kétpöttyösöd, és a kétpöttyösből is ugyanannyi van, mint neked a hétpöttyösből. Nekem pedig – mondja Bence – öttel több hétpöttyösöm van, mint kétpöttyös katicám. Hány hétpöttyös katicát fogott Bence?

5. osztály

1. Felírtuk a pozitív egész számokat 1-től 16-ig egy-egy cédulára. Lehet-e két csoportra osztani a cédulákat úgy, hogy az egyik csoportban a cédulákra írt számok összege 15-szöröse legyen a másik csoportba tartozó cédulákra írt számok összegének?

2. Egy kocka minden lapját pirosra vagy kékre festhetjük. Hány különböző kockát tudunk így készíteni, ha csak azokat a kockákat tekintjük különbözőnek, amelyeket elmozgatással nem lehet fedésbe hozni?

3. Határozzuk meg azt a három törtet, amelyeknek számlálója 1, nevezői különböző pozitív egész számok, összegük kisebb $\frac{1}{2}$-nél, de a lehető legközelebb van $\frac{1}{2}$-hez!

4. Hány olyan ötjegyű tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám van, amely balról jobbra olvasva is ugyanazt jelenti, mint jobbról balra olvasva (pl.: 12321 vagy 10501)?

6. osztály

1. Összeadtuk az egész számokat 1-től 1999-ig. A kapott szám egész szám négyzete-e, vagy nem?

2. Egy négyjegyű számot 9-cel szorozva az eredeti szám számjegyeinek fordított sorrendbe írásával keletkező számot kapjuk. Melyik ez a négyjegyű szám?

3. Egy egyenesnek és egy hatszög kerületének hány közös pontja lehet? Vizsgáld meg az összes esetet!

4. Határozzuk meg azt a négy törtet, amelyeknek számlálója 1, nevezői különböző pozitív egész számok, összegük 1-nél kisebb, de a lehető legközelebb van 1-hez!

7. osztály

1. Sorban egymás mellé írtuk a pozitív egész számokat 1-től egészen 1999-ig. Mennyi lesz az így kapott tízes számrendszerbeli szám számjegyeinek száma?

2. Egy derékszögű háromszög átfogóján határozzuk meg azt a P pontot, amelyre teljesül, hogy P-t a két befogóra merőlegesen vetítve, a vetületek távolsága a lehető legkisebb!

3. Kiválasztunk egy háromjegyű számot: $\overline{abc}$. Ezután képezzük a $\overline{cab}$, majd a $\overline{bca}$ számokat, majd elvégezzük az összeadást:

$$\overline{abc} + \overline{cab} + \overline{bca}.$$

Melyik két egymás utáni pozitív egész szám szorzata lehet ez az összeg?

4. Az A pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakja 1999 darab 2-es és néhány 0 számjegyet tartalmaz. Lehet-e ez a szám négyzetszám?

5. Hányszor fordul elő a 2 prímszám tényezőként a következő szorzatban:

$$101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 200?$$

8. osztály

1. Leírtuk sorban egymás mellé a pozitív egész számokat 1-től 1999-ig. Az így kapott tízes számrendszerbeli szám négyzetszám vagy sem?

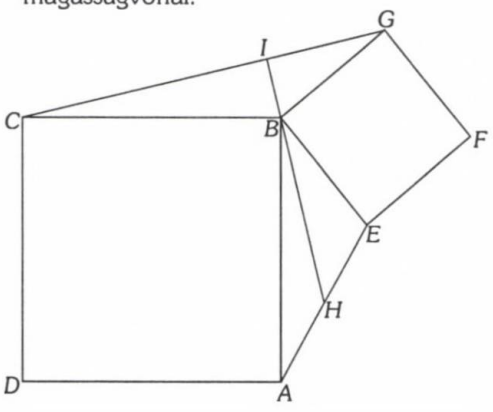
2. Oldjuk meg a prímszámok körében a következő egyenletet:

$$x^2 - 1 = 2y^2.$$

3. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontját jelölje M. Tudjuk, hogy $AB = CM$. Számítsuk ki a háromszög C csúcsánál levő szögét!

4. Igazoljuk, hogy az $s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ $(n \geq 2)$ sorozat tagjainak tízes számrendszerbeli alakjában az utolsó számjegyek periodikusan ismétlődnek!

5. Az ábrán látható $ABCD$ és $BEFG$ négyzeteknek csak a B csúcsa közös.
Igazoljuk, hogy a BAE háromszög B csúcsból induló BH súlyvonalának B-n túli meghosszabbítása a CBG háromszögben magasságvonal!



Megoldások és javítási útmutatók

3. osztály

1. $44 : 44 = 4 : 4 + 4 - 4 = 4 : 4 \cdot 4 : 4 =$
$= 4 \cdot 4 : 4 : 4 = 1$
$4 : 4 + 4 : 4 = 4 - (4 + 4) : 4 = 2$
$(4 + 4 + 4) : 4 = 3$
$(4 - 4) \cdot 4 + 4 = 4$
$(4 \cdot 4 + 4) : 4 = 5$

$5 \cdot 2 = 10$ pont

2. A kismutató 0-tól 3 óráig és 12-től 15 óráig van a fehér mező felett, a nagymutató pedig óránként 15 percet van a fehér mező felett. Így egy nap alatt $2 \cdot 3 \cdot 15 =$ $= 90$ percig látható a két mutató egyszerre a fehér mező felett.

10 pont

Előfordulhat a következő megoldás is:
A jelölt felület a számlap egynegyede. Miután mindkét mutató egyenletesen mozog egész nap, ezért mindketten az összes idejük 1/4-ét töltik ott. Így a közösen eltöltött idő a teljes idő negyedének a negyede, azaz 24/4/4 = 1 1/2 óra, azaz 90 perc.

3. A megfelelő háromjegyű szám lehet: 147, 258 és 369. Ezek háromszorosához adjunk 78-at:

6 pont

$3 \cdot 147 + 78 = 519 \rightarrow$ nem megoldás

1 pont

$3 \cdot 258 + 78 = 852 \rightarrow$ megoldás

1 pont

$3 \cdot 369 + 78 = 1185$ négyjegyű szám $\rightarrow$ nem megoldás

1 pont

A keresett szám a 258.

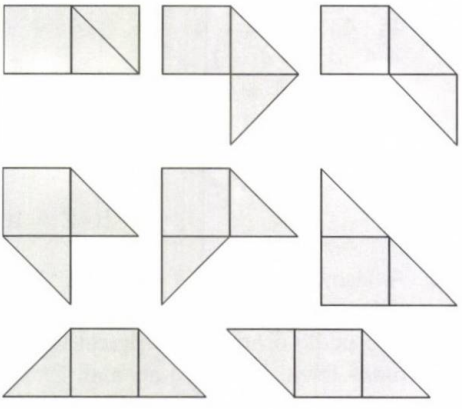
1 pont

Összesen: 10 pont

4. Zsóka minden egyes katicája mellé tegyünk egy kétpöttyöst. A kimaradó 5 katicán 10 pötty van, akkor a többin 90.
$90 : (7 + 2) = 10$ db hétpöttyös katicája van Zsókának

10 pont

5. A megoldások:



6. Írjuk le a folyamatot a keletkezett négyzetek számával: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19,...
Ezeket a számokat megfigyelve észrevehető, hogy 3-mal osztva maradékul 1-gyet adnak. Az 1999 is ilyen szám $(1999 - 1) : 3 = 666$. Egy négyzetet tehát ezzel az eljárással felbonthatok 1999 db négyzetre.

10 pont

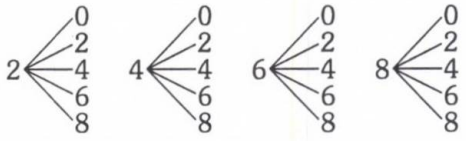
4. osztály

1. A legkevesebb ajándék számát jelölje □.
Felírható, hogy $\square + 2\square + 6\square + 24\square = 132$
$33\square = 132$
$\square = 4$
Az első ajándékozó 4-et, a második 8-at, a harmadik 24-et, a negyedik 96 ajándékot adott.
Valóban: $4 + 8 + 24 + 96 = 132$

10 pont

2. A kétjegyű számok:

tizes egyes



Számítsuk ki az összegüket:
$(20 + 22 + 24 + 26 + 28) + (40 + ... + 48) + (60 + ... + 68) + (80 + ... + 88) = (20 + 88) + (22 + 86) + (24 + 84) + 26 + 82) + (28 + 80) + (40 + 68) + (42 + 66) + (44 + 64) + (46 + 62) + (48 + 60) =$
$= 10 \cdot 108 = 1080$
Vagy
$5 \cdot 20 + 5 \cdot 40 + 5 \cdot 60 + 5 \cdot 80 + 4 \cdot (2 + 4 + 6 + 8) = 5 \cdot (20 + 40 + 60 + 80) + 4 \cdot (2 + 4 + 6 + 8) = 1000 + 80 = 1080$
20 ilyen szám van, összegük 1080.

10 pont

3. A kismutató 0-tól 3 óráig és 12-től 15 óráig van a fehér mező felett, a nagymutató pedig óránként 15 percet van a kék mező felett. Így egy nap alatt $2 \cdot 3 \cdot 15 = 90$ percig látható a két mutató egyszerre a fehér mező felett.

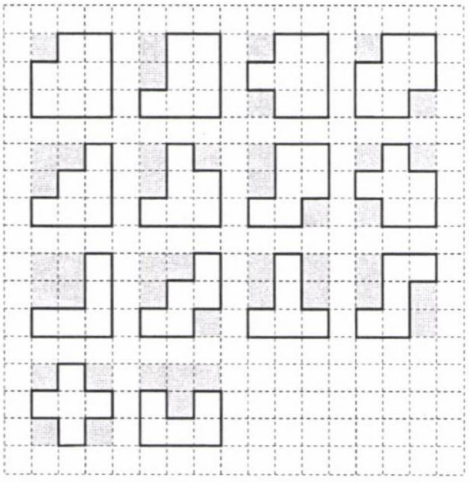
10 pont

Második megoldás:
A jelölt felületek a számlap egy-egy negyedét teszik ki. Miután mindkét mutató egyenletesen mozog egész nap, ezért mindketten az összes idejük 1/4-ét töltik ott. Így a keresett idő a teljes idő negyedének a negyede, azaz 24/4/4 = másfél óra, azaz 90 perc.

4. $999 + 999 + 9 : 9 = 2222 - 222 - 2 : 2 =$
$= 666 + 666 + 666 + 6 : 6 = 3 \cdot 333 + 3 \cdot$
$\cdot 333 + 3 : 3 = 44 \cdot 44 + 4 \cdot 4 \cdot 4 - 4 : 4$

minden jó megoldás 3 pont

5. A lehetséges megoldások:



minden jó megoldás 1 pont

6. A két gyerek összesen ugyanannyi kétpöttyös mint hétpöttyös katicát fogott, tehát $99 : (7 + 2) = 11$ miatt mindegyiküknél 11-11 katica van.
Bencének $(11 - 5) : 2 = 3$ kétpöttyös és $3 + 5 = 8$ hétpöttyös katicája van. (Zsókának pedig éppen fordítva.)

10 pont

5. osztály

1. 1-től 16-ig az egész számok összege 136.

2 pont

Ha a cédulákat a kívánt módon két csoportra lehetne osztani, akkor az összes szám összege a kisebb összegű csoportbeli számok összegének 16-szorosa lenne.

3 pont

A 136 viszont nem osztható 16-tal, így a kívánt csoportosítást nem lehet elvégezni.

2 pont

Összesen: 7 pont

2. Csoportosítsuk a lehetséges színezéseket annak megfelelően, hogy a kocka hány lapja piros (a többi lap kék).

1 olyan kocka van, aminek minden lapja piros. Ha öt lap piros, egy lap kék, az is egy lehetőség, hiszen például mindig a kék lapjára állíthatjuk a kockát.
Ha 4 lap piros és 2 lap kék, akkor a kék lapok lehetnek szemköztiek, vagy van közös élük. Ez 2 lehetőség.

2 pont

Nyilván az eddigi eseteknek megfelelnek azok a színezések, amikor a piros és a kék színeket felcseréljük (minden lap kék – 1 eset, egy piros és 5 kék lap – 1 eset, 2 piros és 4 kék lap – 2 eset).

2 pont

Hátra van még az a lehetőség, amikor 3 lap piros, a többi lap kék. A 3 piros lap lehet olyan, hogy egy csúcsuk közös, vagy két szemközti és egy oldallap piros. Ez 2 lehetőség.

2 pont

Összesen tehát 10 különböző kocka készíthető.

1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az $\frac{1}{2}$-nél kisebb legnagyobb olyan tört, aminek a nevezője pozitív egész szám és a számlálója 1, az $\frac{1}{3}$.

1 pont

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, ezért most az $\frac{1}{6}$-nál kisebb, legnagyobb olyan törtet keressük, amelynek a számlálója 1, a nevezője pozitív egész, ez az $\frac{1}{7}$.

2 pont

$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$, ezért a harmadik keresett tört az $\frac{1}{43}$ lesz, mert ez a legnagyobb olyan tört, ami még kisebb $\frac{1}{42}$-nél, a számlálója 1, a nevezője pozitív egész.

2 pont

A keresett összeg tehát

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} = \frac{451}{903} < \frac{1}{2}$$

2 pont

Összesen: 7 pont

4. A keresett számokat így számolhatjuk ösz-sze:

Az első három számjegyet tetszőlegesen adhatjuk meg (az első jegy nyilván nem lehet 0), ez $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ lehetőség.

4 pont

Az utolsó két számjegyet az első két jegy már egyértelműen meghatározza.

2 pont

Összesen tehát a keresett számok száma 900.

1 pont

Összesen: 7 pont

6. osztály

1. Az $1+2+3+\ldots+1998+1999$ összeg értéke $\frac{1999 \cdot 2000}{2} = 1999000$.

3 pont

A kapott szám nem lehet egy egész szám négyzete, hiszen 1000-rel osztható, de 10 000-rel nem.

3 pont

Összesen: 6 pont

2. Jelöljük a négyjegyű számot így:

$$\overline{abcd},$$

ahol a, b, c és d számjegyek. Mivel a szám 9-szerese $\overline{dcba}$ és így a szám, meg a 9-szeresének összege éppen a szám 10-szerese:

$$\begin{array}{r} \overline{abcd} \\ +\,\overline{dcba} \\ \hline \overline{abcd}0 \end{array}$$

Mivel két négyjegyű szám összege kisebb 20 000-nél, $a = 1$ és így $d = 9$.

3 pont

$c + b + 1 = 9$, hiszen 19 nem lehet, mert ekkor $c = b = 9$ lenne, ami nem jó.

Így, mivel $b + c = c$, csak $b = 0$ és $c = 8$ lehet.

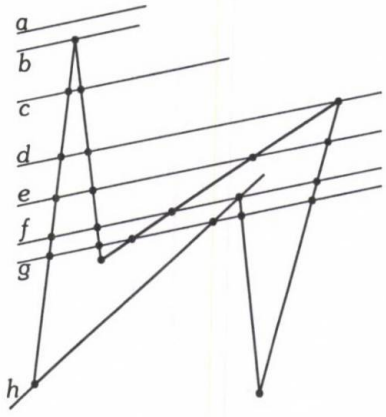
3 pont

Az 1089 jó, mert $9 \cdot 1089 = 9801$.

1 pont

Összesen: 7 pont

3. A lehetséges válaszokat egyetlen konkáv hatszögön illusztráljuk. Itt az egyes egyenesek mutatják, hogy a közös pontok száma lehet 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 és végtelen sok, a megfelelő egyenesek: a, b, c, d, e, f, g, h.



Pontozás: Minden helyes ábrával indokolt válasz 1 pontot ér, tehát erre a feladatra maximum 8 pontot lehet kapni.

4. Az 1-nél kisebb, 1 számlálójú és pozitív egész nevezőjű törtek közül az $\frac{1}{2}$ a legnagyobb.

1 pont

Mivel $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, keressük az $\frac{1}{2}$-nél kisebb, 1 számlálójú, pozitív egész nevezőjű törtek közül a legnagyobbat, ez $\frac{1}{3}$.

1 pont

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, az $\frac{1}{6}$-ot az adott tulajdonságú törtek közül az $\frac{1}{7}$ közelíti meg legjobban.

2 pont

$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$, ehhez az $\frac{1}{43}$ van legközelebb,

2 pont

így a keresett összeg

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}=\frac{1805}{1806}<1.$$

1 pont

Összesen: 7 pont

7. osztály

1. Az egyjegyű számok számjegyeinek száma: 9, a kétjegyű számok száma 90, így ezek számjegyei: $2 \cdot 90 = 180$,

2 pont

100-tól 999-ig 900 háromjegyű szám van, ezeknek $3 \cdot 900 = 2700$ számjegye van,

2 pont

végül 1000-től 1999-ig 1000 négyjegyű szám van, ezeknek $4 \cdot 1000 = 4000$ számjegye van.

2 pont

Összesen tehát

$$9 + 180 + 2700 + 4000 = 6889$$

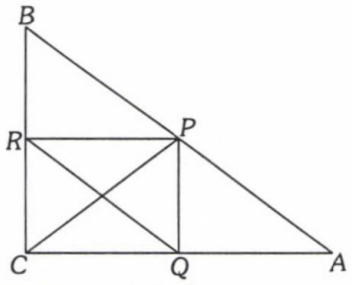
számjegye van az így kapott számnak.

1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az ábrán a P pont merőleges vetülete a befogókon Q és R.

1 pont



A $PQCR$ négyszög téglalap, mert három szöge derékszög.

2 pont

Azt a helyzetet keressük, ahol RQ a lehető legrövidebb. Mivel a téglalap átlói egyenlőek, $RQ = CP$.

3 pont

A CP szakasz akkor a legrövidebb, ha CP merőleges az AB-re, tehát ekkor lesz a két vetület távolsága is a legkisebb.

1 pont

Összesen: 7 pont

3. A kiválasztott háromjegyű számot így írhatjuk fel:

$$100a + 10b + c,$$

az ebből képzett számok

$$100c + 10a + b, \text{ illetve}$$
$$100b + 10c + a,$$

A három szám összege:

$$111(a + b + c).$$

2 pont

$111 = 3 \cdot 37$, ahol 37 prímszám, a kapott összeg második tényezője pedig legfeljebb 27, hiszen három számjegy összege.

2 pont

Így az összeg csak akkor lehet két egymást követő szám szorzata, ha $3(a + b + c) = 36$, vagy $3(a + b + c) = 38$.

1 pont

Az első eset előfordulhat, hiszen az $a + b + c = 12$ egyenletnek sok megoldása van (például $a = 1$, $b = 2$, $c = 9$), de a második eset nem lehetséges, mert 38 nem osztható 3-mal.

1 pont

A kapott összeg tehát a 36 és 37 szorzata lehet.

1 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy négyzetszám 3-mal osztva csak 0, vagy 1 maradékot adhat, mert

$$(3k - 1)^2 = 3(3k^2 - 2k) + 1.$$

2 pont

A szóban forgó szám számjegyeinek összege 3998, ami 3-mal osztva 2 maradékot ad.

2 pont

Mivel a számnak és a számjegyei összegének a 3-as maradéka megegyezik, a szóban forgó szám nem lehet négyzetszám.

3 pont

Összesen: 7 pont

5. Végezzük el a következő azonos átalakítást:

$$101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104 \cdot \ldots \cdot 200 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100}.$$

3 pont

A kapott tört számlálójában a páros tényezők éppen a nevezőben álló tényezők kétszeresei. Ezekkel egyszerűsítve 100 darab 2-es tényező szorzatát és az 1-től 199-ig terjedő páratlan számok szorzatát kapjuk.

3 pont

A 2-es tényező tehát 100-szor fordul elő a szorzatban.

1 pont

Összesen: 7 pont

8. osztály

1. A kapott szám utolsó két jegye 99. Egy szám négyzete akkor végződhet 9-re, ha a szám 3-ra, vagy 7-re végződik.

2 pont

Ha egy szám $10A + 3$ alakú, akkor a négyzete $100A^2 + 60A + 9$ alakú, tehát a tízesek helyén páros számjegy áll.

2 pont

Ha egy szám $10A + 7$ alakú, akkor a négyzete $100A^2 + 140A + 49 = 100A^2 + 10(14A + 4) + 9$ alakú, tehát a tízesek helyén itt is páros számjegy áll.

2 pont

A kapott szám tehát nem négyzetszám.

1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva ezt kapjuk:

$$(x - 1)(x + 1) = 2y^2$$

2 pont

Ha $x = 2$, akkor a bal oldal páratlan, a jobb oldal páros, nincs megoldás.

2 pont

Ha $x > 2$ és prím szám, akkor x páratlan, $x - 1$ és $x + 1$ is páros, tehát a bal oldal 4-gyel is osztható, így az y is páros.

2 pont

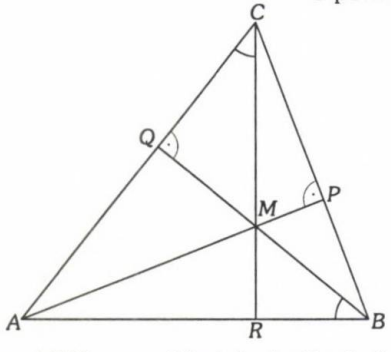
Csak $y = 2$ jöhet szóba, ekkor $x = 3$.
Így az $x = 3$, $y = 2$ az egyetlen megoldás.

1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az $ACR\sphericalangle = ABQ\sphericalangle$, mert merőleges szárú szögek, $AQB\sphericalangle = CQM\sphericalangle = 90°$ és $AB = CM$ a feltevés szerint. Ezért az AQB és CQM háromszögek egybevágóak, tehát $AQ = QM$.

3 pont



Ezért az AQM egyenlőszárú derékszögű háromszög, tehát $CAP\sphericalangle = 45°$.

3 pont

Az APC derékszögű háromszögben tehát az egyik hegyesszög 45°, de akkor az $ACB\sphericalangle = 45°$ is igaz.

1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az s_n sorozat n-edik tagját így írhatjuk fel:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2 pont

A sorozat $n + 20$-dik tagjának és az n-edik tagjának a különbsége:

$$s_{n+20} - s_n = \frac{(n+20)(n+21)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 10(2n + 21)$$

4 pont

osztható 10-zel.
Ez azt jelenti, hogy a sorozat tagjainak utolsó számjegyeiből álló sorozat 20-asával ismétlődik.

1 pont

Összesen: 7 pont

5. Forgassuk el az ABE háromszöget B körül 90°-kal pozitív irányba.

2 pont

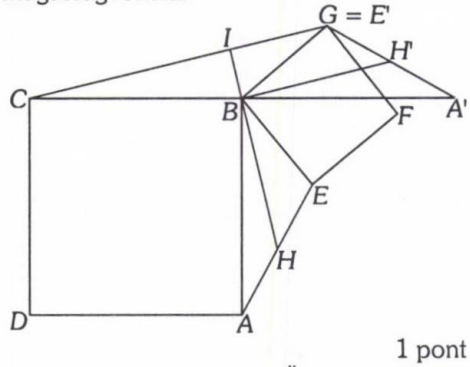
Ekkor BA képe BA' egy egyenesbe esik CB-vel és $CA' = 2CB$.
BE képe, $BE' = BG$.

2 pont

A BH súlyvonal képe BH' középvonal a $CA'G$ háromszögben (hiszen a CA' és $A'G$ oldalak felezőpontját köti össze.) Így BH' párhuzamos CG-vel

2 pont

Mivel BH merőleges BH'-re, így BH merőleges CG-re is, tehát a CBG háromszög magasságvonala.



1 pont

Összesen: 7 pont

Marczis György

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny Erkel Ferenc Gimnázium, Gyula

„Minden, ami emberi, akár jó, akár rossz, előbb-utóbb véget ér. Kivéve a matematikát."
(Erdős Pál)

Minden eddiginél nagyobb érdeklődés mellett rendezték meg Gyulán az *Erkel Ferenc Gimnáziumban* március 20-án a Bolyai János Matematikai Társulat Békés megyei *Hajnal Imre Matematika Tesztverseny*-ét. A megye középiskoláinak legjobb matematikus diákjai az iskoláikban rendezett válogatók alapján adtak egymásnak randevút a fürdővárosi középiskolában.

A rendezvényt *dr. Kereskényi Miklós*, a házigazda iskola igazgatója nyitotta meg, majd *dr. Toró Tibor* akadémikus, a Temesvári Tudományegyetem világhírű fizikusa köszöntötte a vendégeket. Ezután *Marczis György* szaktanácsadó, a BJMT megyei titkára ismertette az egész nap programját.

Ebben az évben *108* tanuló jelentkezett a 120 perces dolgozat megírására annak reményében, hogy a legjobbak felvételi kedvezményeket szerezhetnek a felsőfokú oktatási intézményekbe való jelentkezéskor.

Amíg a diákok dolgoztak, addig kísérő tanáraik és az érdeklődő vendégek a matematika tanításának kiváló szakemberei által vezetett szakmai programon vehettek részt. *Fábosné Zách Enikő*, a Budapesti Tanítóképző Főiskola vezető tanítója *„A kivételesek vannak többen"*, *Somfai Zsuzsa*, az Eötvös József Gimnázium vezető tanára *„A kombinatorikus gondolkodás fejlesztése"*, *dr. Németh József*, a JATE docense *„Néhány meglepő matematikafeladat"* címmel tartott előadást a *70* főnyi közönség számára.

Délután *dr. Toró Tibor* professzor *„A semmiből egy új, más világot teremtettem"* címmel *Bolyai János* életéről beszélt. Őt követte *Emese György*, a budapesti Karinthy Frigyes Gimnázium tanára, aki a természettudományos tantárgyak egyik új segédeszközét, a grafikus számológépet mutatta be. Ezután *Kosztolányi Józsefnek, a JATE* tanársegédjének tolmácsolásában, aki a feladatsor összeállítója is volt, hallgathatták meg az érdeklődők a feladatok helyes megoldásait.

A nehéz szakmai munka mellett kikapcsolódásra is volt idő. A jelenlévők megtekinthették a Műszaki Könyvkiadó, a Bartos Bt. és a Jántek Kft. a matematika tanításával kapcsolatos bemutatóit.

Kora délután került sor az eredményhirdetésre. Előbb *dr. Németh József*, a zsűri elnöke értékelte a versenyzők magas színvonalú munkáját, majd átadta a győztesnek az értékes könyveket és az *Euro-Profil Rt.* által felajánlott *Texas Instruments* grafikus számológépet valamint a helyezetteknek a támogatók által felajánlott okleveleket és az értékes jutalmakat. A nagyszerű rendezvény *dr. Kereskényi Miklós* igazgatónak a jövő évre szóló meghívó szavaival zárult.

A legjobbak a következő eredményeket érték el (a teljes lista megtekinthető a *www.erkel.hu* címen):

1. *Dénes Attila* 145 pont, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, tanára *Szabó Zsófia*
2. *Barák Tamás* 140 pont, Széchenyi István Közg. Szakk., Békéscsaba, tanára *Schédl Ilona*
2. *Baur Edina* 140 pont, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, tanára *Bajnok Zsolt*
3. *Kádas Attila* 135 pont, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, tanára *Szabó Zsófia*
4. *Benkő Zoltán* 130 pont, Táncsics Mihály Gimnázium, Orosháza, tanára *Hegedűs Zoltán*
5. *Baur Eszter* 129 pont, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, tanára *Szabó Zsófia*

A szervező Erkel Ferenc Gimnázium legjobb helyezettjének különdíját *Bánfi Barnabás* (127 pont) kapta. Felkészítő tanára *Tóth István* volt.

Külön ki kell emelni *Szabó Zsófiának*, a Rózsa Ferenc Gimnázium tanárának nevét, aki a hat legjobb tanuló közül hármat (köztük az elsőt) készített fel.

A verseny szervezői gratulálnak minden diáknak és felkészítő tanáraiknak. További munkájukhoz sok sikert kívánnak.

A rendezők köszönik mindazoknak a segítségét, akik nélkül ez a program nem jöhetett volna létre.

Fő támogatóink voltak: Békés Megyei Pedagógiai Intézet, BJMT Békés Megyei Tagozata, Dürer Nyomda és Kiadó Kft., Erkel Ferenc Gimnázium Alapítvány, Euro-Profil Rt. – Budapest, Gyula Város Polgármesteri Hivatala, Implom József Alapítvány, Mozaik Oktatási Stúdió-Szeged, Műszaki Könyvkiadó, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.

Támogattak: AQUARELL – Kovács Z., Köles M., Pfeff M., Szabó Z., Bagyinszki Zoltán, Bartos Bt. – Békéscsaba, Békés Megyei Hírlap, Békés Megyei Nap, Bibliofil Kft. Könyvesbolt – Gyula, BOBOSZ Kft. – Bor Gábor, Szabó István, Busa László, Corvin Hotel – Gyula, Csepi Ker. Kft. – Csepregi Lajos, Csomós János, Dürer Albert Általános Iskola – Gyula, ÉLÉSKER Kft. – Gyula, „Ez is az is" ABC – Bacsa Magdolna, FHM Munkás Kft. – Ózd, Göndöcs Benedek Szakképző Iskola, Győri Keksz Kft. – Pásztor Zoltán, Gyula Városi Sportcsarnok-Horváth Béla, Gyulai Hírlap, Gyulai Húskombinát Szakszervezeti Tanácsa, Gyulai Várszínház, Hevesi Tamás, Info-Set Kft. – Kiss Imre, Kereskedelmi és Hitelbank – Gyula, Kertes és Társa Kereskedelmi Kft. – Kertes István, Körös Főiskola-Békéscsaba, Lingva Nyelvstúdió, Profi Foto – Puy László, SHANNON IRODA – Nyíregyháza, Speedway Büfé – Burda Ferenc, Start Műszaki – Maris Tibor, Surinás László, Szabó József, Tébi Ferenc, Tevan Andor Gimnázium – Békéscsaba, WELCOME Nyelviskola, Gyula – Fodorné Horváth Anett, Zugevő Pizzéria – Annus Géza.

Feladatsor

1. $|2-\pi| =$

(A) $\pi - 2$ (B) $2 + \pi$ (C) 1,14

(D) $\frac{8}{7}$ (E) $2 - \pi$

2. Ha $\sqrt{x+2} = 2$, akkor $(x+2)^2 =$

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) 4

(D) 8 (E) 16

3. $\frac{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}{2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}} =$

(A) 6 (B) 8 (C) $\frac{31}{2}$

(D) 24 (E) 512

4. Ha x, y, z pozitív egész számok, továbbá x és y páratlan, akkor $3^x + (y-1)^2 \cdot z$

(A) páratlan szám z tetszőleges értéke esetén.

(B) páros szám z tetszőleges értéke esetén.

(C) páratlan szám, ha z páros; páros szám, ha z páratlan.

(D) páratlan, ha z páratlan; páros, ha z páros.

(E) páratlan, ha z 3-nak nem többszöröse; páros, ha z 3-nak többszöröse.

5. Legyen A az alábbi állítás: „Ha az n egész szám jegyeinek összege osztható 6-tal, akkor n osztható 6-tal." Egy olyan n érték, ami azt mutatja, hogy A hamis:

(A) 30 (B) 33 (C) 40

(D) 42 (E) ezek közül egyik sem

6. Hány olyan 100-nál kisebb pozitív egész szám van, amelyek pozitív osztóinak a száma páratlan?

(A) 7 (B) 8 (C) 9

(D) 10 (E) 13

7. Három egységsugarú kör páronként érinti egymást. Mekkora az érintési pontok által meghatározott háromszög területe?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\sqrt{3}$

(D) 1 (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

8. Ha két szám közül a nagyobbik háromszorosa annyi, mint a kisebbik négyszerese, és a két szám különbsége 8, akkor a két szám közül a nagyobbik

(A) 16 (B) 24 (C) 32

(D) 44 (E) 52.

9. Melyik az a legkisebb kétjegyű pozitív egész szám, amelyhez 4-et adva a kapott szám jegyeinek összege fele az eredeti szám jegyei összegének?

(A) 37 (B) 55 (C) 27

(D) 19 (E) 46

10. Egy nyári üdülés folyamán 7-szer esett az eső délelőtt vagy délután. Ha délután esett, akkor délelőtt nem esett. Összesen 5 esőtlen délután és 6 esőtlen délelőtt volt. Hány napig tartott az üdülés?

(A) 7 (B) 8 (C) 12

(D) 11 (E) 9

11. A legnagyobb x-nél nem nagyobb egésznek és a legkisebb x-nél nem kisebb egésznek az összege 5. Ekkor az összes ilyen tulajdonságú x értékek halmaza

(A) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ (B) $\{x|\ 2 \le x \le 3\}$

(C) $\{x|\ 2 \le x < 3\}$ (D) $\{x|\ 2 < x \le 3\}$

(E) $\{x|\ 2 < x < 3\}$

12. Az $|x-2|+|x-4|=2$ egyenlet valós megoldásainak a száma

(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 3-nál több

13. Egy konvex négyszög átlóinak hossza a és b. Tudjuk még, hogy a négyszög középvonalai (a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok) egyenlő hosszúak. A négyszög területe

(A) $\frac{(a+b)^2}{4}$ (B) ab (C) $\frac{ab}{2}$

(D) $\frac{(a-b)^2}{4}$ (E) $\frac{a^2-b^2}{2}$.

14. 1-től kezdve rendre egymás mellé írjuk a pozitív egész számokat. Melyik számjegy áll az 1999. helyen?

(A) 7 (B) 0 (C) 2
(D) 3 (E) 1

15. Melyik az a legnagyobb 12-vel osztható ötjegyű szám, amely tartalmazza az 1, 3, 4, 5 számjegyeket és még egy számjegyet?

(A) 54318 (B) 54316 (C) 54314
(D) 54312 (E) 53148

16. a, b, c és d olyan pozitív egészek, amelyekre $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$. Ha $d < 100$, akkor az a lehetséges legnagyobb értéke

(A) 2367 (B) 2375 (C) 2391
(D) 2399 (E) 2400.

17. Egy konvex hatszög belső szögei fokokban mérve egy egész számokból álló számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora a hatszög legnagyobb szögének lehetséges legnagyobb értéke?

(A) 165° (B) 167° (C)170°
(D) 175° (E) 179°

18. Mennyi azon k pozitív egészek száma, amelyekre a $kx - 12 = 3k$ egyenletnek x-re nézve van egész megoldása?

(A) 3 (B) 4 (C) 5
(D) 6 (E) 7

19. Hány valós megoldása van a $3^{2x+2} - 3^{x+3} - 3^x + 3 = 0$ egyenletnek?

(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

20. Mennyi az $x^2 + y^2$ értéke, ha x és y kielégíti az

$xy = 6$ és $x^2y + xy^2 + x + y = 63$

egyenletrendszert?

(A) 13 (B) $\frac{1173}{32}$ (C) 55
(D) 69 (E) 81

21. Írjunk egy kockába az oldallapok középpontjainak összekötésével egy szabályos oktaédert. Mennyi az oktaéder és a kocka térfogatának aránya?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{16}$ (C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (E) $\frac{1}{4}$

22. 11-től $2n + 1$-ig összeadva a páratlan számokat a kapott összeg osztható 19-cel. A legkisebb ilyen n szám

(A) 4 (B) 13 (C) 23
(D) 11 (E) 32.

23. Egy matematikaversenyen Bea és Dani együttesen elért pontszáma ugyanannyi, mint Annáé és Csabáé együttvéve. Ha Bea és Csaba pontjait megcserélnénk, akkor Anna és Csaba összpontja több lenne, mint a másik kettőé együtt. Dani egymaga több pontot ért el, mint Bea és Csaba együtt. Állapítsuk meg a versenyzők végső sorrendjét az első helyezettel kezdve. (Feltételezzük, hogy minden pontszám nemnegatív.)

(A) Dani, Anna, Csaba, Bea
(B) Dani, Anna, Bea, Csaba
(C) Dani, Csaba, Bea, Anna
(D) Anna, Dani, Csaba, Bea
(E) Anna, Dani, Bea, Csaba

24. Egy szimmetrikus érintőtrapéz beírt körének sugara R. A beírt kör szárakon található érintési pontjainak távolsága a. Ekkor a trapéz területe

(A) $\frac{8R^3}{a}$ (B) $4Ra$ (C) $\frac{5R^3}{2a}$

(D) $\frac{8a^3}{R}$ (E) $6aR$.

25. Egy építőkészlet 96 darabja kétféle anyagból (műanyag és fa), 3 méretben (kicsi, közepes és nagy), 4 színben (kék, piros, zöld, sárga) és 4 formában (kör, hatszög, háromszög, négyszög) készült. Hány olyan darab van a készletben, amely a „műanyag közepes nagyságú piros körtől" pontosan két tulajdonságban tér el?

(A) 29 (B) 39 (C) 48
(D) 56 (E) 62

26. Az első 50 pozitív egész közül legfeljebb hányat tudunk kiválasztani úgy, hogy a kiválasztottak közül semelyik kettő összege sem osztható 7-tel?
(A) 6 (B) 7 (C) 14
(D) 22 (E) 23

27. Az $ABCD$ tetraéder élei 7, 13, 18, 27, 36 és 41 egység hosszúak. Mekkora a CD él, ha $AB = 41$?
(A) 7 (B) 13 (C) 18
(D) 27 (E) 36

28. Napsütésben vízszintes mezőn áll egy gömb. Egy pillanatban a gömb árnyéka 10 méterre nyúlik a gömb és a talaj érintési pontjától. Ugyanebben a pillanatban a függőleges méterrúd árnyéka 2 méter hosszú. Hány méter a gömb sugara?
(A) $\frac{5}{2}$ (B) $9-4\sqrt{5}$
(C) $8\sqrt{10}-23$ (D) $6-\sqrt{15}$
(E) $10\sqrt{5}-20$

29. Legyen n pozitív egész szám. Mi lehet az n értéke, ha tudjuk, hogy a $2x+2y+z=n$ egyenletnek 28 pozitív egészekből álló rendezett számhármas megoldása van?
(A) 14 vagy 15 (B) 15 vagy 16
(C) 16 vagy 17 (D) 17 vagy 18
(E) 18 vagy 19

30. Egy urna kezdetben 100 fekete és 100 fehér golyót tartalmaz. Egymás után hármasával kiveszünk golyókat és visszateszünk néhányat a következő szabály szerint:

Kivéve	Betéve
3 fekete	1 fekete
2 fekete, 1 fehér	1 fekete, 1 fehér
1 fekete, 2 fehér	2 fehér
3 fehér	1 fekete, 1 fehér

Véges számú lépés után az urna tartalma az alábbiak közül melyik lehet?
(A) 2 fekete (B) 2 fehér
(C) 1 fekete (D) 1 fekete és 1 fehér
(E) 1 fehér

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 1999. augusztus 31.

125. Legfeljebb hány pontban metszheti egymást a sík 9 darab körvonala és 47 darab egyenese?

Nagy Erzsébet, Szeged

126. Legyen $f(x)$ egy olyan n-edfokú polinom $(n \geq 1)$, amelyre $f(k)=\frac{k}{k+1}$ minden $k \in \{0; 1; ...; n\}$ esetén. Határozzuk meg az $f(n+1)$ értékét!

127. Igazoljuk, hogy ha $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ nemnegatív számok, és létezik $\sigma \in S_n$ (S_n az $\{1; 2; ...; n\}$ halmaz permutációinak halmaza) úgy, hogy $\alpha_i + \alpha_{\sigma(i)} \leq \pi$ minden $i \in \{1; 2; ...; n\}$, akkor

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i \leq \cos\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)!$$

A KöMaL **F. 3186.** feladatának általánosítása

Dályay Pál Péter, Szeged

128. Legyen $a_1, a_2, ..., a_n$ az első n pozitív egész szám egy permutációja, és legyen

$$S=(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+...+(a_{n-1}-a_n)^2.$$

Határozzuk meg az első n pozitív egész szám összes lehetséges permutációjához hozzárendelt S összegek átlagát (számtani közepét)!

129. Melyek azok a nem négyzetszám pozitív egész n számok, amelyekre $\left[\sqrt{n}\right]^3 \mid n^2$? ($[x]$ az x szám egész részét jelöli.)

Feladatmegoldások (110-114. feladatok)

110. Legyen n pozitív egész szám. Létezik-e $2n+1$ darab egymást követő $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ természetes szám úgy, hogy

$$a_0^3 + a_1^3 + \ldots + a_n^3 = a_{n+1}^3 + \ldots + a_{2n}^3$$

teljesüljön?

„Concours général" verseny, Franciaország

Megoldás: A feltételek alapján, ha $i < n$, akkor $a_i = a_n - (n-i)$, ha pedig $i > n$, akkor $a_i = a_n + (i-n)$. Ezekkel

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^3 = (n+1)a_n^3 - 3a_n^2\frac{n(n+1)}{2} + 3a_n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad (1)$$

illetve

$$\sum_{i=n+1}^{2n} a_i^3 = na_n^3 + 3a_n^2\frac{n(n+1)}{2} + 3a_n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (2)$$

(1) és (2) egyenlőségéből kapjuk, hogy

$$2a_n^3 = 6a_n^2 n(n+1) + n^2(n+1)^2. \quad (3)$$

Legyen $x = n(n+1)$. Ezzel (3) a következő alakot ölti:

$$x^2 + 6a_n^2 x - 2a_n^3 = 0. \quad (4)$$

A (4) egyenletnek csak akkor van egész megoldása, ha diszkriminánsa négyzetszám, ami egyenértékű azzal, hogy $a_n^3(9a_n+2)$ négyzetszám. Mivel a_n három természetes szám közül a középső, ezért $a_n > 0$, így az $a_n(9a_n+2)$-nek is négyzetszámnak kell lennie. Ez egyenértékű azzal, hogy létezik $y \in \mathbb{Z}^+$, hogy a

$$9a_n^2 + 2a_n - y^2 = 0 \quad (5)$$

egyenletnek van pozitív egész a_n megoldása. Ehhez (5) diszkriminánsának, négyzetszámnak kellene lennie. Ez egyenértékű azzal, hogy $1 + 9y^2$ négyzetszám. Ez viszont nem teljesülhet, ugyanis $(3y)^2 < 1 + 9y^2 < (1+3y)^2$.

A feladatban feltett kérdésre a válasz tehát negatív.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 6.

111. Mutassuk meg, hogy ha egy egész szám négyzetének utolsó két jegyéből képzett, legfeljebb kétjegyű szám is négyzetszám, akkor ugyanezen tulajdonsággal minden 50-nel megnövelt egész szám is rendelkezik! Legfeljebb hány egymást követő egész számra teljesülhet, hogy mindegyikük négyzetének utolsó két jegyéből képzett, legfeljebb kétjegyű szám is négyzetszám?

Darvasi Gyula, Nyíregyháza

Megoldás: Mivel

$$(x+50)^2 - x^2 = 100 \cdot (x+25),$$

ezért $(x+50)^2$ és x^2 utolsó két jegye megegyezik, tehát ha x^2 rendelkezik a feladatban leírt tulajdonsággal, akkor $(x+50)^2$ is rendelkezik.

Kaptuk, hogy x^2 utolsó két jegye periodikusan változik, és egy ilyen periodushossz az 50 lesz. Ezért a feladat második felében kért sorozat kereséséhez elég egy tetszőlegesen választott, 50 egymást követő egész számból álló sorozatot vizsgálni.

Induljunk ki a $H = \{0; \pm1; \pm2; \ldots; \pm24; 25\}$ halmazból. Ezen H halmaz $T = \{0; \pm1; \pm2; \ldots; \pm10\}$ részhalmazának elemeire triviálisan teljesül, hogy négyzetének utolsó két számjegyéből képzett legfeljebb kétjegyű szám négyzetszám, tehát legalább 21 számra teljesül a feladatban rögzített tulajdonság.

A $(\pm11)^2$, $(\pm12)^2$, $(\pm13)^2$, $(\pm14)^2$ számok utolsó két jegyéből képzett legfeljebb kétjegyű számok nem négyzetszámok, így $21 + 8 = 29$ számot már megvizsgáltunk H-ból. $50 - 29 = 21$ számot még nem néztünk, de ha ezek mindegyike megfelelő, akkor sem lehet 21-nél hosszabb kívánt tulajdonságú számsorozat, így legfeljebb 21 egymást követő egész számra teljesülhet a tekintett tulajdonság.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 6.

112. Igaz-e, hogy bármely $n > 3$ alapú számrendszerben van olyan $n+3$ jegyű szám, amelynek az első számjegye egyenlő a számban található 0-k számával, a második számjegye az 1-esek számával, a harmadik számjegye a 2-esek számával, és így tovább?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Egy $n > 3$ alapú számrendszerben legyen $N = \overline{a_0 a_1 \ldots a_{n+2}}_{(n)}$ egy $n+3$ jegyű szám. Mivel a számrendszerben n, $n+1$, $n+2$ számjegyként nem jelenhet meg, ezért $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = 0$, és így $a_0 \geq 3$. A jegyek száma $n+3$, ezért a feladat értelmében fennáll a következő két egyenlőség:

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = n+3, \quad (1)$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + (n-1)a_{n-1} = n+3. \quad (2)$$

A továbbiakban meghatározzuk az összes olyan N-et, amely eleget tesz a feladat feltételeinek. (A kitűzött feladat ennek csak része.)

Jelöljük N utolsó 0-tól különböző jegyét a_{n-k}-val (az előzőek miatt $k>0$). Ha $n-k<\frac{n+2}{2}$, akkor $a_0 \geq k+2$, de az előző egyenlőtlenség értelmében $k>\frac{n-2}{2}$, így $a_0>\frac{n+2}{2}>n-k$, ami azt jelenti, hogy $a_{a_0} \geq 1$, vagyis $n-k$-nál nagyobb indexű jegyek között is van 0-tól különböző. Ez ellentmond annak, hogy $a_{n-k+1}=\ldots=a_n=$ $=a_{n+1}=a_{n+2}=0$, tehát $n-k \geq \frac{n+2}{2}$, azaz

$$k \leq \frac{n-2}{2}. \qquad (3)$$

Ha $a_{n-k} \geq 2$, akkor (2)-ből következik, hogy

$$a_1+2a_2+3a_3+\ldots+ \\ +(n-k-1)a_{n-k-1} \leq 2k-n+3. \qquad (4)$$

(3) és (4) következménye az

$$a_1+2a_2+3a_3+\ldots+(n-k-1)a_{n-k-1} \leq 1$$

egyenlőtlenség, amely csak akkor állhat fenn, ha $a_1 \in \{0;1\}$ és $a_2=a_3=\ldots=a_{n-k-1}=0$. Ez pedig (mivel $n-k \geq \frac{n+2}{2} \geq 3$) azt jelenti, hogy csak két jegy lehet $n-k$, ezek $a_0=a_{n-k}=$ $=n-k$, vagyis $a_{n-k}=2$, ami ellentmond pl. az $a_2=0$ egyenlőségnek. Kaptuk tehát, hogy nincs olyan N, amely eleget tesz a feladat követelményeinek és amelyben $a_{n-k} \geq 2$.

Ha $a_{n-k}=1$, akkor (2) alapján adódik, hogy

$$a_1+2a_2+3a_3+\ldots+ \\ +(n-k-1)a_{n-k-1}=k+3. \qquad (5)$$

A következőkben három esetet vizsgálunk:

1. Ha $a_0=n-k$, akkor (1)-ből
$$a_1+a_2+\ldots+a_{n-k-1}=k+2. \qquad (6)$$
(5) és (6) alapján $a_2+2a_3+\ldots+$ $+(n-k-2)a_{n-k-1}=1$, ami csak akkor állhat fenn, ha $a_2=1$ és $a_3=\ldots=$ $=a_{n-k-1}=0$. Mivel $a_0=n-k \geq 3$, $a_{n-k}=1$ és N-nek van egy 2-es jegye, ezért $a_1=2$. Ebben az esetben a jegyek, figyelembe véve, hogy (1) alapján $k=1$ lehet csak:
$$a_0=n-1,\ a_1=2,\ a_2=1,$$
$$a_3=\ldots=a_{n-2}=0,\ a_{n-1}=1,$$
$$a_n=a_{n+1}=a_{n+2}=0.$$
Az így kapott jegyek teljesítik a feladat feltételeit. Tehát minden $n>3$ esetén létezik a feladat tulajdonságait kielégítő N.
2. Ha $a_1=n-k$, akkor (3) és (5) alapján
$$2a_2+3a_3+\ldots+(n-k-1)a_{n-k-1}= \\ =2k-n+3 \leq 1. \qquad (7)$$
Ez csak akkor állhat fenn, ha $a_2=a_3=$ $=\ldots=a_{n-k-1}=0$, és így $a_0=n$, ami n alapú számrendszerben nem lehet. Tehát $a_1=n-k$ nem teljesülhet.
3. Ha $a_i=n-k$, ahol $i \geq 2$, akkor (5)-ből
$$a_1+\ldots+(i-1)a_{i-1}+(i+1)a_{i+1}+\ldots+ \\ +(n-k-1)a_{n-k-1}= \\ =(i+1)k+3-in \leq \frac{(1-i)n+2(2-i)}{2},$$
ami $i \geq 2$ esetén negatív, tehát ez az eset is lehetetlen.

A fentiek alapján világos, hogy bármely $n>3$ esetén egyetlen olyan N szám létezik, amely teljesíti a feladat feltételeit.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 5.

113. Határozzuk meg azon $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre bármely pozitív x és y esetén teljesül, hogy

$$1+f(x-y) \leq \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2 \cdot (1+f(xy))!$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Természetes, hogy csak olyan pozitív x és y értékekről van szó a feladatban, amelyekre $x>y$, mert különben az $f(x-y)$-nak nem lenne értelme. A változók ezen értékeire egyenlőtlenségünk ekvivalens az

$$\frac{1+f(x-y)}{(x-y)^2} \leq \frac{1+f(xy)}{(xy)^2} \qquad (1)$$

egyenlőtlenséggel. Legyen $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(t)=\frac{1+f(t)}{t^2}$, amivel (1)

$$g(x-y) \leq g(xy) \qquad (2)$$

alakú bármely $x>y>0$ esetén.

Legyen (2)-ben $x-y=z$. Ezzel a $g(z) \leq g(y^2+yz)$ egyenlőtlenséget kapjuk, amely érvényes minden $y, z \in \mathbb{R}^+$ esetén, így $y=\frac{-z+\sqrt{z^2+4u}}{2}>0$ esetén is, ahol $u=y^2+yz>0$. Tehát (2) alapján

$$g(z) \leq g(u) \qquad (3)$$

tetszőleges $z, u \in \mathbb{R}^+$ esetén. z és u szerepe felcserélhető, vagyis

$$g(u) \leq g(z) \qquad (4)$$

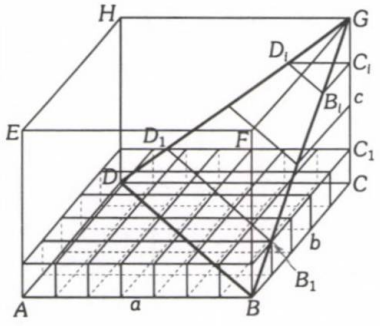
is igaz, amiből adódóan a g függvény állandó a pozitív valós számok halmazán. Ha $g(x)=a$ $(x \in \mathbb{R}^+,\ a \in \mathbb{R})$, akkor $f(x)=ax^2-1$, amely minden $a \in \mathbb{R}$ esetén kielégíti a feladat egyenlőtlenségét, pontosabban a két oldal egyenlőségét.

Dályay Pál Péter, Szeged; Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely; Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 3.

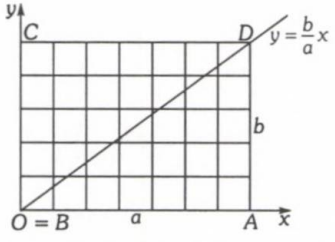
114. Egy téglatest egy csúcsba futó éleinek hosszát jelölje a, b, c, ahol a, b és c páronként relatív prím pozitív egészek. Bontsuk fel a téglatestet egységkockákra, majd egy kiszemelt csúcsba befutó élek másik végpontjaira illeszkedő síkkal vágjuk ketté. Hány egységkockát vág ketté a tekintett sík?

Megoldás: Az egységkockák páronként egymásra merőleges lapjai párhuzamosak a téglatest $ABCD$, $BCGF$, $EFGH$ oldallapjaival. Tekintsük a feladat által meghatározott BDG sík és az $ABCD$ síkkal párhuzamos, egymástól egységnyi távolságra levő síkok metszésvonalait:



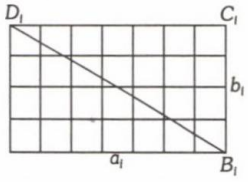
Az $ABCD$ síkkal párhuzamos síkok száma $c-1$. Ezek a síkok és a BDG sík metszésvonalai párhuzamosak a téglatest BD átlójával, és így a BDG háromszöget $c-1$ részre osztják.

A továbbiakban azt kell megadnunk, hogy az $ABCD$ téglalap BD átlója hány egységnégyzetet vág ketté.



Tekintsük az ábrát. Mivel $(a; b) = 1$, ezért az $y = \frac{b}{a} \cdot x$ egyenesnek a négyzetrácson belül nincs rácspontja, így a négyzetráccsal való metszéspontjainak száma $a-1+b-1$. Ehhez hozzá kell vennünk az átló B és D végpontjait, így az összes metszéspont száma $a+b$. Az $a+b$ különböző metszéspont pedig $a+b-1$ szakaszt határoz meg, így a kettévágott egységnégyzetek száma $a+b-1$.

Tekintsük a BDG sík $ABCD$ síkkal párhuzamos metszeteit. A B_1D_1, B_2D_2, ..., $B_{c-1}D_{c-1}$ metszésvonalak egy G középpontú, rendre $\frac{c-1}{c} \cdot a$, ..., $\frac{2}{c} \cdot a$, $\frac{1}{c} \cdot a$ arányú, az $ABCD$ téglalappal középpontosan hasonló téglalapok átlói. Ha $a_i = \frac{c-i}{c} \cdot a$ és $b_i = \frac{c-i}{c} \cdot b$ $(i = 1, 2, ..., c-1)$, akkor a B_iD_i átló $[a_i] + [b_i]$ darab rácsegyenest metsz, azaz összesen $[a_i] + [b_i] + 1$ darab egységnégyzetbe metsz bele:



Az $ABCD$ téglalapon csupán az ABC háromszög el nem vágott négyzetei felett nem lesznek kettévágott egységkockák. Az el nem vágott négyzetek száma

$$E = \frac{t_{ABCD} - (a+b-1)}{2} = \frac{ab-(a+b-1)}{2}.$$

Az $ABCD$ téglalap azon négyzeteinek száma, amelyek felett lesz kettévágott egységkocka

$$S = t_{ABCD} - E = ab - \frac{ab-(a+b-1)}{2} = \frac{ab+a+b-1}{2}.$$

A B_iD_i átlók által kettévágott négyzetek alatt is, felett is lesz elvágott kocka, amelyek számát hozzá kell adnunk az előző S összeghez. A kettévágot kockák száma így

$$\frac{ab+a+b-1}{2} + \sum_{i=1}^{c-1} \left([a_i] + [b_i] + 1 \right).$$

A második tag összegzéséhez felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{n-i}{n} \cdot k \right] = \frac{(k-1)\cdot(n-1)}{2}$ (lásd pl. Skljarszkij-Csencov-Jaglom: Válogatott fejezetek az elemi matematika köréből 1. Aritmetika és algebra, 31. oldal 102. feladat). Ezzel a kettévágott kockák száma

$$\frac{ab+bc+ca-1}{2}.$$

Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép

A megoldók száma: 3.

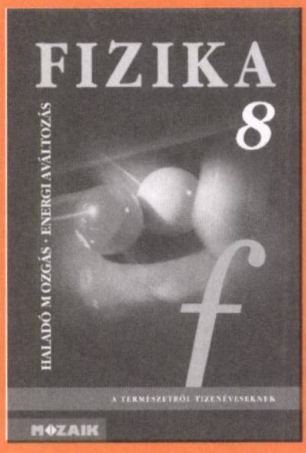
A megoldók névsora: Dályay Pál Péter, Szeged (110-114. 2 mód); Horváth Géza, Zselíz (111., 112.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (110., 114.); Schutzbach Mártonné, Siófok (110., 111.); Simon József, Csíkszereda (110-112.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (110-113.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (110., 111., 113., 114.).

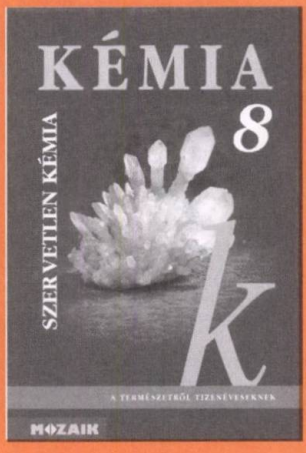
A TERMÉSZETRŐL

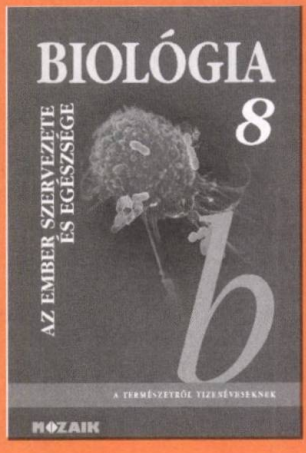
TERMÉSZETISMERET · BIOLÓGIA · FIZIKA · KÉMIA · FÖLDRAJZ

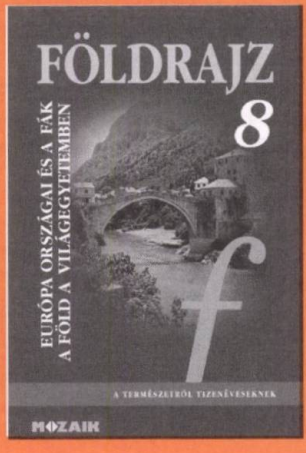
TIZENÉVESEKNEK

A Földrajz 8.
és a Biológia 8. kötetek
megjelenésével
a Mozaik Kiadó népszerű
tankönyvsorozata
5-8. osztályig teljessé
válik. Minden tankönyv,
munkafüzet és feladatlap
megrendelhető
az 1999/2000-es tanévre
az Oktatási Minisztérium
megrendelőlapjának
124-127. oldalán.









MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 47-01-01, 470-052
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Van-e értelme táblázatkezelőt (például EXCEL-t) tanítani?

(Dr. Török Turul)

Az 1999. évi Beke Manó emlékdíjasok

A XXVIII. Országos Kalmár László Matematika Verseny döntőjéről

Beszámoló az 1999. évi GORDIUSZ Matematika Tesztversenyről

(Dr. Poronyi Gábor)

VII. ÉVFOLYAM 1999 4

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelő szerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 880 Ft
A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

TARTALOM

Van-e értelme táblázatkezelőt (például EXCEL-t) tanítani?
Dr. Török Turul
főiskolai docens, Budapest

Az 1999. évi Beke Manó emlékdíjasok

Hírek versenyekről

A XXVIII. Országos Kalmár László Matematika Verseny döntőjéről

Beszámoló az 1999. évi GORDIUSZ Matematika Tesztversenyről
Dr. Poronyi Gábor
igazgató, Pécs

Könyvismertetés

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Dr. Török Turul

Van-e értelme táblázatkezelőt (például EXCEL-t) tanítani?

Mottó: Az informatika (számítástechnika) tantárgy jövőjét más tárgyakkal való kapcsolata fogja meghatározni!

Minthogy pár ezreléknyi részem van abban, hogy a fenti témakör végül is bekerült a NAT-ba, egyértelműen igenlő választ adok a kérdésre. Ugyanakkor többéves óralátogatási, OKJ (szakmai, számítógép-kezelői, sőt szoftverüzemeltetői) vizsgáztatási tapasztalat alapján rögtön hozzá kell fűznöm, hogy nem egészen „így".

Rengeteg vita dúlt már eddig, hogy vajon eszköz avagy cél a számítástechnika. Lényegében mindenki egyetért abban, hogy eszközhasználatot kell tanítani, és **szinte** mindenki következetesen funkciókat, konvenciókat tanít (gyakoroltat), és minimális energiát fektet az **alkalmazásra,** illetve az eredmények elemzésére, diszkussziójára. Természetesen lehet ellenpéldákat is sorolni, az alábbiak nem nekik szólnak. Ugyanakkor saját, hivatásszerű tapasztalataim alapot adnak a morgolódásomhoz.

Néhány (nem örvendetes) példa:

1. Egy (OKJ) vizsgán a 70 000 Ft-os havi villanyszámla láttán a tanuló szeme se rebben.
2. Általános iskolás gyerekek egész értékeket 2-4 tizedesre formáznak.
3. Középiskolás tanuló a hasznot a bruttó és a nettó érték szorzatával számolja!
4. Hetedikes gyerektől kérdeztem, miért kördiagrammal ábrázolta az adatokat. Válasz: „Tudok akármilyen diagramot csinálni!"
5. Hatodikban egyetlen oszlopból csináltak diagramot a diákok. Azt még sikerült elfogadtatni, hogy vegyük hozzá a sorok „elnevezését" (első oszlop), de több (numerikus) oszlop egyszerre történő ábrázolására többségüket nem sikerült rávenni.
6. Tanártovábbképzésben például már mindenki megtanulta, hogy van abszolút és relatív hivatkozás. Alkalmazása nem zökkenőmentes: keveredtek a konstansok, a változók, a paraméterek.
7. Régi tapasztalatom, hogy a százalékos feladatokkal szinte mindenkit zavarba lehet hozni, de ezt a bizonytalanságot az ÁFA, bruttó és egyéb „bűvszavak" csak tovább fokozzák.
8. A legprimitívebb feladatoknál is képesek megkérdezni a diákok: „Itt mivel kell szorozni? Vagy osztani kell?"
9. Összeadás esetén is izgatottan „Függvényvarázslót" emlegetnek.

Bármilyen korú tanulókról elmondható, hogy a táblázatkezelő (szövegszerkesztő) rengeteg funkcióját ismerik, sőt, még meg is tudják fogalmazni, mit, hogyan kell csinálni (meg nyomni, kattintani). Ugyanakkor teljesen tanácstalanok, hogy miért kell valamit úgy csinálni, mi a haszna, mire jó. Azért nem tudják használni az eszközt, mert **alapvető** hétköznapi (matematikai) fogalmakkal, összefüggésekkel nincsenek tisztában, nem tudják homályos tudásukat beépíteni, alkalmazni – ld. fenti példákat.

Megpróbálok az alábbiakban néhány gyakorló feladatot felsorolni, ami pontosan ezt a gondot enyhítené. Konkrétabban fogalmazva, megpróbálom lazán összekapcsolni a matematikát és az EXCEL-t, annak érdekében, hogy mindkettő hasznát lássa a kapcsolódásnak.

Matematika az EXCEL-ben

1. 1000 Ft-nak mennyi a 110%-a, 120, ..., 250%-a? Vizsgáljuk meg diagrammal, milyen kapcsolat van a % értéke és az emelt összeg között!
2. **Különböző** összegeket emeljünk meg a fenti módon! Most mi olvasható le a diagram(ok)ról?
3. Egy áru árát 10, ..., 120%-kal felemelik. Hogyan változik az ár az emelés (%) függvényében? Keressünk linearitást a diagramon!
4. Csökkentsük az árat 5, ..., 95%-kal! Most hogyan változik az ár, és milyen összefüggés van a mennyiségek között?
5. Egy áru 1200 Ft-ba került egy 50, ..., 150%-os ármozgás hatására. Mi volt az eredeti ár?

Fenti példák egyszerre gyakoroltatják a táblázatkezelő funkcióit, és mélyítik a százalék, az arány fogalmakat. Itt még az EXCEL-lel való ismerkedésen van a hangsúly, a matematikát csak ismételjük, esetleg „mélyítjük".

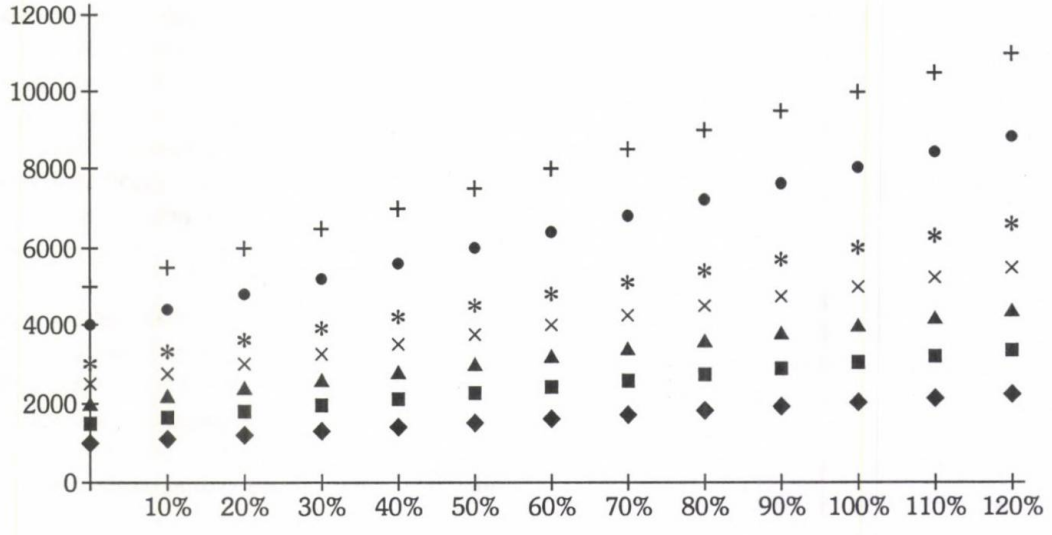
Már 6-7. osztályban el lehet kezdeni a függvény mint hozzárendelés ismertetését. Az EXCEL nagyon kényelmesen (ciklussal) ad „értéktáblázatot", aminek alapján ***megsejthetünk*** *egy csomó dolgot a függvényről!*

Újabb lépcső a diagram, majd némi alakítással, papírmunkával eljutunk a „folytonos" függvényig. Ez elsőfokú esetben nagyon egyszerű, de később tetszőleges (polinom, exponenciális, trigonometrikus stb.) függvényre is gyümölcsöző.

Illusztráció gyanánt mellékelünk egy táblázatot a 3. feladathoz:

áremelés

	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%	110%	120%
1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200
1500	1650	1800	1950	2100	2250	2400	2550	2700	2850	3000	3150	3300
2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400
2500	2750	3000	3250	3500	3750	4000	4250	4500	4750	5000	5250	5500
3000	3300	3600	3900	4200	4500	4800	5100	5400	5700	6000	6300	6600
4000	4400	4800	5200	5600	6000	6400	6800	7200	7600	8000	8400	8800
5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500	11000



B3 cellában (1100) = **A3*(1+B$2)** áll, amit elhúzunk jobbra.

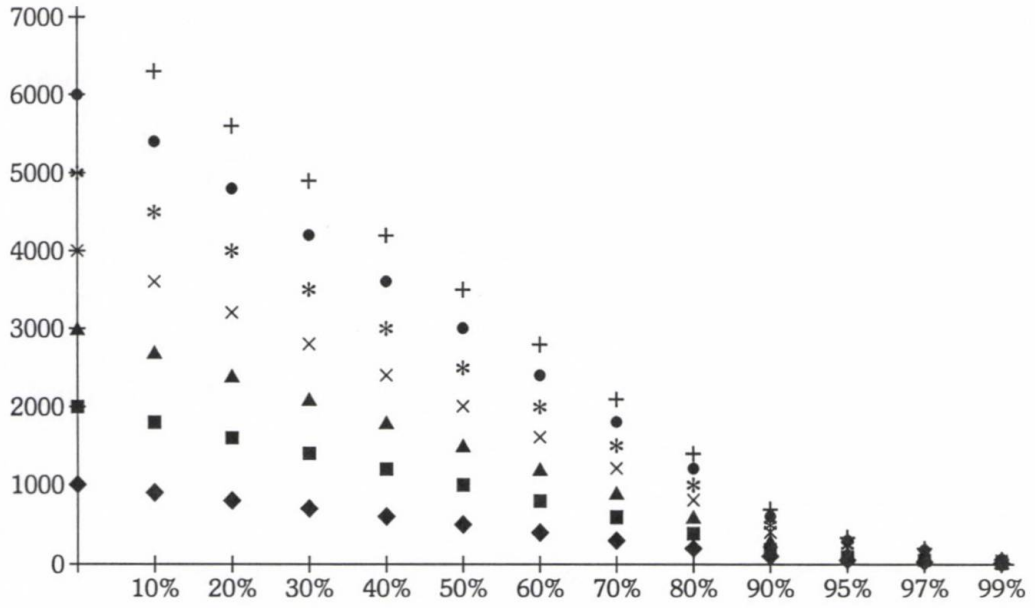
B4 cellában (1650) = **A4*(1+B$2)** áll, amit elhúzunk jobbra stb.

A diagramon jól látszik az értékek linearitása – ferdén. Függőlegesen nem látszik annyira jól, ***vajon miért?***

Ugyanilyen táblázat a 4. feladathoz **(árcsökkentés)**:

árcsökkentés

	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97%	99%
1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	50	30	10
2000	1800	1600	1400	1200	1000	800	600	400	200	100	60	20
3000	2700	2400	2100	1800	1500	1200	900	600	300	150	90	30
4000	3600	3200	2800	2400	2000	1600	1200	800	400	200	120	40
5000	4500	4000	3500	3000	2500	2000	1500	1000	500	250	150	50
6000	5400	4800	4200	3600	3000	2400	1800	1200	600	300	180	60
7000	6300	5600	4900	4200	3500	2800	2100	1400	700	350	210	70



Vajon miért „lapul le" a diagram jobb oldala?

Hangsúlyozni kell, hogy az EXCEL a vízszintes tengelyen akkor is ekvidisztáns pontokat vesz fel, ha azok között a számegyenesen nem egyforma távolság van!

EXCEL a matematikában

Alább már inkább matematikai feladatok (kisebb problémák) következnek, ahol egyértelműen a matematika, a gondolkodás, a felismerés a főszereplő, aminek **eszköze** a számítógépes környezet. Nem feltétlenül táblázatkezelő; lehet (például BASIC, Pascal) program is! A lényeg, hogy a képernyőn látható (speciális) részeredményekből **sejthető** meg az (általános) összefüggés, törvényszerűség.

6. Egy áru árát a%-kal emelik, majd az emelt árat a%-kal csökkentik. Hogyan járnak a vá-

sárlók? Hogyan függ a végső ár az eredetitől, és hogyan az a%-tól?

7. Előző feladatban az emelés után b%-kal csökkentünk. Mekkora legyen b ahhoz, hogy a végső ár megegyezzen az eredetivel (ne legyen változás összességében)? Hogyan változik b az a függvényében?

8. Különböző keveréses feladatoknál (%, C° stb.) is sokat segít egy-egy táblázat, diagram.

9. Nagyon hasznos a sorozatoknál, számtani, mértani haladványok mellett a másodrendű számtani sorozat (pl. 4, 5, 8, 13, 20, 29, ...), a Fibonacci számok. Sok ötletet olvashatunk Pósa Lajos: Sorozatok című könyvében (Calibra-Műszaki, 1998.)

10. A sorozatokon belül külön érdemes említeni a lánctörteket – középiskolában.

$$\cfrac{c}{a+\cfrac{c}{b+\cfrac{c}{a+\cfrac{c}{b+\ldots}}}}$$

Kifejezetten izgalmas kérdés a mellékelt típusú lánctörtek „konvergenciájának" vizsgálata.

Néhány további érdekesség olvasható Urbán Jánostól A Matematika Tanításának 1999. márciusi számában, ld. Varga Tamás Módszertani Napok 1998.

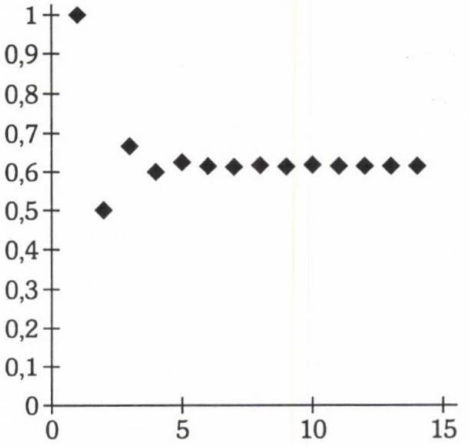
5. Nagyon ajánlom dr. Beke Manó – Reif Jakab: Érettségi vizsgálati mathematikai feladatok gyűjteménye (1893.) reprint kiadását (Integra-Kft, 1993.)

6. Sok jó feladat van természetesen az OKJ vizsgák feladatbankjában is. Arról a feladatok nyilván nem tehetnek, hogy a tanulók ezeken a vizsgákon (órákon) még azt a matematikát is elfelejtik, amire egy algebraórán talán még emlékeznének. (Pontosan az zavar, hogy az idő egészében nagyon sokan technikát tanítanak; alig szerepel az összefüggés, a matematikai (fizikai) háttér, és ezért nagyon rossz a hatásfok.)

7. Hálás témák még (EXCEL-ben haladóbbaknak) a számelmélet, paraméteres egyenletek, a határérték, közelítő módszerek, statisztika, populációs modellek, állapotmódszer, optimalizáció, sőt még **grafikus problémák** is tárgyalhatók táblázatkezelővel.

Az első illusztráció Urbán János említette két sejtéshez ($f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^{n+1}$ és f_n/f_{n+1}) segítség. Mintaszerű konvergencia „látszik".

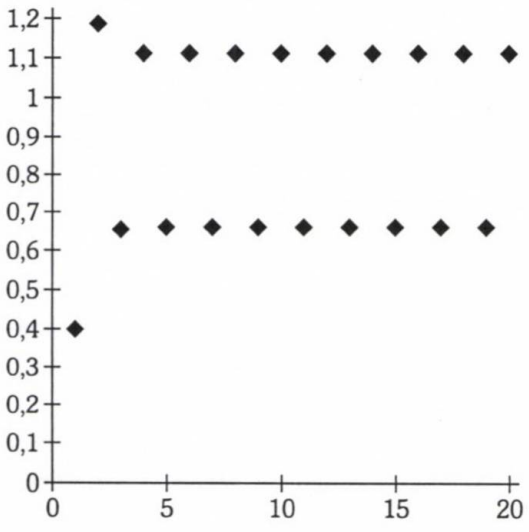
	F	F^2	F*F	D	Q
0	1	1			
1	1	1	2	−1	1
2	2	4	3	1	0,5
3	3	9	10	−1	0,66667
4	5	25	24	1	0,6
5	8	64	65	−1	0,625
6	13	169	168	1	0,61538
7	21	441	442	−1	0,61905
8	34	1156	1155	1	0,61765
9	55	3025	3026	−1	0,61818
10	89	7921	7920	1	0,61798
11	144	20736	20737	−1	0,61806
12	233	54289	54288	1	0,61803
13	377	142129	142130	−1	0,61804
14	610	372100	372099	1	0,61803
15	987				



Az alábbi melléklet pedig a 10. példában említett lánctört viselkedését mutatja $a = 5$, $b = 3$ és $c = 4$ értékek mellett. Érdemes változtatni a, b, c értékeket, bizonyára még érdekesebb sorozatok és diagram adódnak.

$$4/(a + 4/(b + (4/a + \ldots)))$$

a, b	5	3
	$L(n)$	$L(n) - L(n-2)$
1	0,4	
2	1,176	
3	0,648	–0,247619
4	1,097	0,07986484
5	0,656	–0,0084837
6	1,094	0,0025446
7	0,656	–0,000274
8	1,094	8,1974E–05
9	0,656	–8,829E–06
10	1,094	2,6417E–06
11	0,656	–2,845E–07
12	1,094	8,5133E–08
13	0,656	–9,17E–09
14	1,094	2,7436E–09
15	0,656	–2,955E–10
16	1,094	8,8415E–11
17	0,656	–9,523E–12
18	1,094	2,8495E–12
19	0,656	–3,069 E–13
20	1,094	9,1704E–14



A két táblázat és grafikon együtt igen hasznos a konvergenciafogalom kialakításához, sőt a konvergenciasebességhez is tanulságos adalék.

Két technikai megjegyzés:

- A tanulók nagyon élvezik a „lehúzást". Ne engedjük, hogy az egész feladat egyetlen „másolás" legyen: törjük meg a ciklust (pl. 20, 30, 40, 50 után 70, 80, 90, majd 120, 130 következzen). Ez nem annyira mechanikus, jobban rögzül a „képlet". Ezt a „nem egyenletes" skálát külön lehet értékelni az **ábrázolásnál** (diagramok).
- A célértékkeresés és a „solver" használata előtt **mindig iteráltassunk** soronként, cellánként! **Lássa a tanuló,** hogyan alakul az eredmény, mert a villanásszerűen előugró egyetlen érték mindig misztikus, nehezen értelmezhető.

Irodalom

[1] Török Turul: Számítógép a matematikaórán. Typotex, 1994.

[2] Tóth János – Török Turul: Problémamegoldás (számítógéppel). I.-II. Informatika + Technika 3./3-4. (1999. március–június).

[3] Urbán János: Lánctörtek és alkalmazásaik. Varga Tamás Módszertani Napok 1998. (A Matematika Tanítása, 1999. március)

Az 1999. évi Beke Manó emlékdíjasok

A Beke Manó Emlékdíj Bizottság 1999-ben a Beke Manó-díj 1. fokozatát ítélte oda **Lajos Józsefnének**, a Móricz Zsigmond Gimnázium tanárának, az Országos Közoktatási Szolgáltató Iroda főmunkatársának hosszú időn át végzett kiváló és eredményes oktató-nevelő munkájáért.

A Beke Manó-díj 2. fokozatát ítélte a bizottság **Iker János** főiskolai tanárnak, a Szombathelyi Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Bolyai János Gyakorló Általános Iskolája és Gimnáziuma igazgatójának eredményes oktatásszervező, irányító és elkötelezett pedagógiai munkásságáért.

Kálmán Lászlónak, a Miskolci Földes Ferenc Gimnázium tanárának, igazgatójának a matematikatanításért, a matematika népszerűsítéséért végzett több évtizedes munkájáért.

Lukács Mártonné általános iskolai matematika-fizika szakos tanárnak, szaktanácsadónak színvonalas és eredményes pedagógusi munkájáért.

Thiry Imrénének, a Budapesti Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanárának, sokéves kiváló matematikatanári munkásságáért.

Végh Erikának, a Kőszegi Mezőgazdasági és Kereskedelmi Szakközépiskola tanárának magas színvonalú szakmai, pedagógiai munkájáért.

Zsinkó Erzsébetnek, a Budapesti Tanítóképző Főiskola docensének az örömszerző és szakmailag kifogástalan matematikatanításért folytatott lelkiismeretes, lelkes és eredményes munkájáért.

Indoklás:

Lajos Józsefné a mai magyar matematikai közélet kimagasló személyisége. Az OKSzI-ban végzett rendkívül sokrétű munkáját mindig lelkiismeretesen, sokszor önmagát sem kímélve végzi, mert a matematikatanítás ügyét szent dolognak tartja.

Az országos matematikaversenyek – az általános iskolától a középiskoláig – az ő szervező tevékenységének köszönhetően minden évben magas színvonalon kerülnek lebonyolításra. Több versenybizottság ügyvezető elnökeként olyan munkamódszert alakított ki, amellyel biztosítható a kifogástalan bizottsági munka a versenyfeladatok kitűzésétől az értékelésig.

Tankönyvek, feladatgyűjtemények szerkesztőjeként, lektoraként is színvonalas, lelkiismeretes munkát végez. Neki köszönhető, hogy létezik a Matematika című módszertani folyóirat. Nagy szerepe van abban, hogy megjelenhetett a legutóbbi évek országos versenyeinek feladatait és azok megoldásait tartalmazó kiadvány.

Az ország minden területén kedvelt előadó nemcsak naprakész oktatáspolitikai tájékozottsága miatt, hanem szellemes, szép matematikai problémák és megoldások, módszertani ajánlások terjesztőjeként is.

Hat éve szervezi és vezeti a Matematika tanárok nyári egyetemét, ezt a különlegesen hatékony továbbképzést, amelyen diákok és tanárok együtt vesznek részt foglalkozásokon, együtt tanulják – művelik a matematikát.

Minden munkáját a matematika, a gyerekek és a tanítók – tanárok szeretete, becsülése, tisztelete hatja át.

Iker János tanárként és intézményvezetőként jelentős erőfeszítéseket tett a matematikai kultúra terjesztéséért, fejlesztéséért, a főiskolai, középiskolai és általános iskolai matematikatanítás módszertanának gazdagításáért. Rendszeresen tart előadásokat a matematikatanítás különféle területeiről, illetve vezetéselméleti témákból.

Munkatársaitól elvárja az igényes, következetes pedagógiai, szaktárgyi munkát, ahhoz igyekszik megteremteni az optimális feltételeket. Iskolájában igazi matematika tantárgyi műhelyt hozott létre, vezetése alatt eredményes matematikatanítás folyik.

Közreműködik a nagy népszerűségnek örvendő megyei szervezésű matematikaversenyek előkészítésében, lebonyolításában.

Pedagógiai, szaktárgyi eredményeiről több cikke jelent meg folyóiratokban, kiadványokban.

Kálmán László hosszú ideje vesz részt a Bolyai János Matematikai Társulat tagjaként, megyei vezetőségi tagjaként, illetve 1993 óta az oktatási szakosztály elnökeként a matematikaoktatás színvonal-emeléséért folyó munkában. Páratlan szervezőkészséggel és lelkesedéssel irányítja a Borsodi Tagozatot. Iskolájában is meggyőződéssel szolgálta a matematikaoktatás korszerűsítését és a tanártovábbképzést. Diákjai közül sokan vesznek részt évről évre tanulmányi versenyeken. Megszervezte a Kis Matematikusok Baráti Körét, segíti a társulat tanulmányi versenyeinek ügyét.

Az utóbbi évek nagyobb horderejű rendezvényeinek (matematika táboroknak, kongresszusoknak, konferenciáknak) is lelkes szervezője.

Kálmán László erőfeszítésének is köszönhető, hogy a Miskolci Egyetem és a középiskolák matematikatanárai közti jó kapcsolat kiszélesedett, elmélyült.

Lukács Mártonné mindkét szaktárgyát tanítja a zalaegerszegi Dr. Hamburger Jenő Általános Iskolában, ezek mellett munkaközösségvezetői feladatokat is ellát. Nagy gondot fordít az önképzésre, több szakmai módszertani tanfolyamon, továbbképzésben vett részt.

Társszerzőkkel fizika feladatgyűjteményt állított össze, ami 1982-ben hiánypótlónak számított. A függvénytanítás témakörben írt dolgozatával pályadíjat nyert.

Kiemelt feladatának tekinti a tehetséges tanulók fejlesztését. Szakkört vezet, rendszeres szervezője és előadója a nyári szaktáboroknak.

1991-től matematika szaktanácsadóként látogatja a megye iskoláit, segíti a kezdő nevelőket, szervezi a szakmai továbbképzéseket, gondozza a tanulmányi versenyeket. Lelkiismeretessége, segítőkészsége, jó szándéka elismerést szerzett kollégái, a zalai matematikatanárok körében.

Thiry Imréné több, mint négy évtizede neveli a jövő matematikusait. A speciális matematika tagozaton az indulás óta tanít. A ma itthon és külföldön élő matematikus nemzedékből alig akad olyan, aki ne ismerné Gabi nénit. Többen köszönhetik neki sikeres pályafutásukat. Tehetséges, jó szakember. Nem csak azok a tanítványai tisztelik és szeretik, akik kapcsolatban maradtak a matematikával felnőtt életükben is. Thiry Imréné tud valamit, amit ezen a pályán is kevesen: a matematikát egyrészt eszköznek tekinti az élet dolgaiban való eligazodáshoz, másrészt a problémamegoldást örömforrásnak tartja, és tanítványait is e két úton vezeti el a matematikai ismeretek birodalmába.

Megalkuvást nem ismerő tisztessége, tapintata, figyelmessége és segítőkészsége azok az erényei, amelyek alapján a tantestület minden tagja először vele osztja meg örömét, bánatát, tőle kér tanácsot. Mindenkori tanítványainak szülei is partnernek tekintik nevelőmunkájukban.

Két évtizedig vezette az osztályfőnöki munkaközösséget. Sok fiatal kolléga tőle tanulta meg a pedagóguspálya emberi követelményeit, a gyerekekkel való mértéktartóan gondoskodó, türelmes, következetes bánásmódot.

Végh Erika fő erőssége gazdag módszertani kultúrájában és gyermekszeretetében rejlik. Érzékenyen igazodik növendékei igényeihez, képességeihez. Körültekintő pedagógiai és alapos szakmai tudásával szép eredményeket ért el a gyengébb képességű tanulók biztos matematikatudásának kiépítésében is.

Tanári munkája során az alap- és középfokú matematikatanítás egészére rálátást szerzett. Rendszeresen és aktívan vesz részt az általános iskolások számára szervezett Zrínyi Ilona országos matematikaverseny feladatainak elkészítésében. Versenyfeladatai több ízben szerepeltek a megyei és az országos döntőn. A Természet Világa folyóirat matematika témakörben meghirdetett pályázatán tanítványai dobogós helyezést értek el, ő maga felkészítő munkájáért részesült elismerésben.

Komoly szerepe van Végh Erikának abban, hogy iskolájában egységes értelmezést és megfelelő gyakorlati megvalósítást nyertek a matematika követelmények. Fiatalabb kollégáit mindig szívesen segíti, készségesen osztja meg velük tapasztalatait, támogatja törekvéseiket.

Zsinkó Erzsébet munkájának igen magas fokú szakmai igényesség az alapja. Nem a száraz ismeretátadás jellemzi előadásait, gyakorlatait, hanem az élményszerű, gondolkodásfejlesztő módszerépítés, a tudatos, sokoldalú képességfejlesztés. Hallgatóinak egész személyiségformálásával törődik, igyekszik megértetni velük a kisgyermek játékos tudásvágyát, a matematikai fogalmak kiépítésének fokozatait, lehetőségeit.

Önmagát nem kímélően precíz. Nagyon megbízható. Őszinte véleményére mindenki számíthat, udvarias, határozott állásfoglalására építeni lehet, ez mindig igaz értéket képvisel.

Sok éve vesz részt az általános iskolai tankönyvek bírálatában, főiskolai jegyzetek készítésében. Szakcikkek írásával segíti az alsó tagozatos tanítók munkáját. Jelenleg az 5. és 6. osztályosok számára ír tankönyvet, munkafüzetet, feladatgyűjteményt. A Tankönyvkiadó pályázatának elnyerése után – társszerzőkkel – kidolgozta az ÉKSZER matematika-tantervet, amely hangsúlyosan fogalmazza meg a tananyag ismerettartalma mellett a képességfejlesztés területeit és lehetőségeit is.

Leleményes, érdekes, újszerű feladatait, problémafelvetéseit a vándorgyűléseken, budapesti és vidéken vállalt előadásain is többször megtapasztalhattuk és élvezhettük.

HÍREK VERSENYEKRŐL

A XXVIII. Országos Kalmár László Matematika Verseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület 1999. június 28-30-ig rendezte meg a 28. „Kalmár László" Országos Matematika Verseny döntőjét Vácott.

Az általános iskolák felső tagozatos (vagy a gimnáziumok ennek megfelelő korosztályú) tanulóinak rendezett verseny döntőjén 102 fő mérte össze tudását.

A négy évfolyamban legjobb helyezést elért tanulók:

5. osztály
I. *Nikházy László,* Győr, Kazinczy F. Gimnázium
II. *Dányi Zsolt,* Győrsövényházi Általános Iskola (tanára Németh László)
III. *Pesti Veronika,* Nagykanizsa, Batthyány L. Gimnázium (tanára Erdős Gábor)

6. osztály
I. *Steller Gábor,* Budapest, ELTE Radnóti Gimnázium (tanára Morvai Éva)
II. *Seres Gyula,* Nyírkáta, Általános Iskola (tanára Pető Lajos)
III. *Ábrám Dániel,* Miskolc, Arany J. Általános Iskola (tanára Ábrám Tibor)

7. osztály
I. *Horváth Márton,* Budapest, Fazekas M. Gimnázium (tanárai Fazakas Tünde, Hraskó András)
II. *Tóth Anett,* Szeged, Radnóti M. Gimnázium (tanára Kosztolányi József)
III. *Rácz Béla,* Budapest, Fazekas M. Gimnázium (tanárai Fazakas Tünde, Hraskó András)

8. osztály
I. *Bergmann Gábor,* Budapest, Berzsenyi D. Gimnázium (tanárai Hubert Györgyné, Kévés Rita)
II. *Gáthy Lajos,* Fehérgyarmat, Zalka Máté Gimnázium (tanára Petermann Istvánné)
III. *Csóka Endre,* Debrecen, Fazekas M. Gimnázium (tanára Balázs Tivadar)

A verseny döntőjének két napján a következő feladatokat tűzte ki a versenybizottság:

Ötödik osztály
1. nap

1. Bence összeadta 1-től 20-ig a pozitív egész számok reciprokát. A kapott törtet egyszerűsítette, és azt állítja, hogy az egyszerűsítés után kapott tört számlálója osztható 5-tel. Igaza van-e?

2. Milyen számjegyeket jelölnek az a, b, c betűk, ha tudjuk, hogy a tízes számrendszerben felírt $\overline{2abc1}$ és $\overline{1abc2}$ ötjegyű számok hányadosa megegyezik 21 és 12 hányadosával?

3. Andi és Bea a következő játékot játsszák. Nyolc színes gyurmagolyót, amelyek közül 2 piros, 2 kék, 2 zöld és 2 sárga, felváltva egy kocka csúcsaiba nyomnak. Andi kezd, bármelyik golyót bármelyik csúcsba teheti. Ezután Bea következik, a megmaradt golyókból bármelyiket egy még szabad kockacsúcsba teheti. Ezután újra Andi jön, majd Bea mindaddig, amíg van golyó (és így szabad kockacsúcs is). Andi nyer, ha a végén van olyan éle a kockának, amelynek két végén azonos színű golyó van, ellenkező esetben Bea nyer. Ki tud győzni ebben a játékban?

4. Egy négyzetrácsos (kockás) papírból kivágtunk egy 5×6-os téglalapot. Hány olyan négyzet látható ezen a téglalapon, amelynek oldalait a négyzetrács egyenesei alkotják?

Hatodik osztály
1. nap

1. Melyik az a három prímszám, amelyekre igaz, hogy a szorzatuk éppen 5-szöröse az összegüknek?

2. Az $ABCD$ négyzet oldala 3 egység. Az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja E, a BC oldal B-hez közelebbi harmadolópontja F és a DA oldal D-hez közelebbi harmadoló pontja G. Mennyi az EFG háromszög területe?

3. X és Y a múlt században születtek, különböző években. Később mindketten elmondhatták magukról, hogy n éves voltam az n^2 évszámmal jelölt évben. Melyik évben született X és Y?

4. El kell szállítani néhány lezárt ládában lévő árut. A szállítást úgy kell megszervezni, hogy háromtonnás teherautókkal egyszerre kell az összes ládát elvinni (a 3 tonnás teherautó legfeljebb 3 tonnát tud elvinni). Csak annyit tudunk, hogy a ládák együttes súlya 10 tonna, és egyik láda sem nehezebb 1 tonnánál. Minimálisan hány teherautóra van szükség?

Hetedik osztály
1. nap

1. Mi az utolsó két számjegye a 7^{1999} hatvány értékének?

2. A metró egyik mozgólépcsőjén felfelé szaladva 30 lépcsőt lépünk. Ugyanezen a lépcsőn ugyanekkora sebességgel lefelé haladva 150 lépcsőfokot lépünk. Hány lépcsőfokot kellene lépni, ha ugyanezen a lépcsőn ugyanekkora sebességgel mennénk felfelé akkor, amikor a mozgólépcső áll?

3. Az $ABCD$ téglalapot egy négyzetrácsos füzetben rajzoltuk meg a rácsegyenesek mentén, $AB = 12$ egység, $BC = 4$ egység. A téglalap CD oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja E, a D-hez közelebbi harmadolópontja F. Mekkora az ACD, AED és AFD szögek összege?

4. Egy darab papírt felvághatunk 8 vagy 12 darabra, a kapott darabok bármelyikét újra felvághatjuk 8 vagy 12 darabra, és így tovább. Elérhető-e néhány ilyen daraboláss al, hogy 60 papírdarabunk legyen? És a 65-öt elérhetjük-e?

5. Adjuk meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyeknek a négyzete három azonos, 0-tól különböző számjegyre végződik!

Nyolcadik osztály
1. nap

1. Igazoljuk, hogy 2001 nem állítható elő két pozitív egész szám köbének összegeként!

2. Két hajó a tengeren egymásra merőleges irányban halad, az első 30 km/óra, a második 40 km/óra állandó sebességgel. A haladási irányuk metszéspontja O. Az indulás pillanatában az első hajó távolsága O-tól 100 km, a másodiké 300 km volt. Haladásuk során mekkora volt a két hajó legkisebb távolsága?

3. Az ABC derékszögű háromszög derékszögű C csúcsából húzott magasság talppontja az átfogón D. Igazoljuk, hogy az ABC, BCD, ACD háromszögekbe írt körök sugarainak összege egyenlő az átfogóhoz tartozó magassággal!

4. Egy sakkversenyen k versenyző vett részt (mindenki játszott mindenkivel). A versenyzők között voltak mesterek és nagymesterek. A verseny végén kiderült, hogy a nagymesterek az összes olyan partit megnyerték, amit mesterekkel játszottak, és ezekben a partikban az egész versenyen összegyűjthető összes pontok felét szerezték meg. Igazoljuk, hogy k négyzetszám!

5. Hány olyan háromszög van, amelynek kerülete 60 egység, és oldalainak hosszát egész szám fejezi ki?

Ötödik osztály
2. nap

1. Barnabás a következő rejtvényt adta fel a barátjának: „Gondoltam egy páros pozitív egész számot, kétszer vettem, majd hozzáadtam 1-et. Az eredményt újra megkétszereztem, és hozzáadtam 1-et. Ezt még néhányszor megismételtem, és végül 1999-et kaptam. Melyik számra gondoltam?" Te is állapítsad meg, hogy melyik számra gondolt Barnabás!

2. Adott egy kocka. Az egy-egy csúcsba futó élek felezőpontjain átfektetett síkokkal levágjuk a kocka sarkait. Jellemezzed az így kapott testet (hány csúcsa, éle, lapja van, milyen sokszögek a határoló lapjai)!

3. Fel lehet-e osztani az egész számokat 1-től 100-ig négy csoportra úgy, hogy a második csoportban 10-zel több legyen a számok összege, mint az elsőben, a harmadikban is 10-zel több, mint a másodikban, és végül a negyedik csoportban is 10-zel több legyen az összeg, mint a harmadikban?

4. Hat különböző számjegyből állíts össze három kétjegyű számot úgy, hogy a három szám szorzata a lehető legnagyobb legyen!

Hatodik osztály
2. nap

1. Melyek azok a tízes számrendszerben felírt háromjegyű számok, amelyeket ha ugyanezekkel a számjegyekkel ugyanilyen sorrendben a 15-ös számrendszerben olvasunk, akkor éppen 2-szer akkora számot kapunk?

2. Legfeljebb hány részre osztja fel a síkot két kör, három kör és négy kör?

3. Egy körlemezt négy átmérőjével 8 egybevágó körcikkre bontunk. Mindegyik körcikkbe egy háromjegyű számot kell írni úgy, hogy csak az 1 és 2 számjegyeket használhatjuk fel, és két szomszédos körcikkbe írt szám csak egy helyi értéken különbözzön. Elvégezhető-e ez a beírás, ha igen, hogyan? Fogalmazzuk meg, és oldjuk is meg a megfelelő feladatot 8 átmérővel és 4 jegyű számokkal!

4. Hét horgász összesen 100 halat fogott. Érdekes, hogy mindegyiküknek különböző számú hal akadt a horgára. Mutassuk meg, hogy van köztük három olyan horgász, akik együtt legalább 50 halat fogtak!

Hetedik osztály
2. nap

1. Melyik az az egész szám, amelyik a 328-nál a számjegyei összegével kisebb?

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának a felezéspontja D. Az ADC háromszögbe írt kör CD oldalon lévő E érintési pontja felezi a CD oldalt. Mekkorák az ABC háromszög hegyesszögei?

3. Két település közötti úton, amelyen nincs vízszintes szakasz, csak emelkedőkből és lejtőkből áll, autóbuszjárat közlekedik. Az emelkedőn az autóbusz 40 km/óra, a lejtőn 60 km/óra sebességgel halad. A két település közti utat az autóbusz oda és vissza 2 óra alatt teszi meg (nem számítva a várakozási időt). Milyen messze van egymástól a két település?

4. Egy szabályos hatszög középpontján három olyan szimmetriatengely halad át, amely a szemközti csúcspárokat köti össze. Igazoljuk, hogy bárhol is veszünk fel egy P pontot a hatszög kerületén, ennek a három szimmetriatengelytől mért távolságai közül a két rövidebbik összege egyenlő a hosszabbikkal!

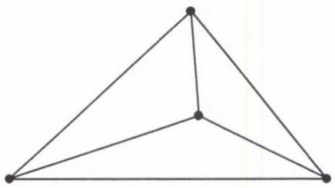
Nyolcadik osztály
2. nap

1. Van 10 különböző könyvünk, ezekből 5 darab, egyenként 2-2 könyvet tartalmazó csomagokat kell készíteni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

2. Mutassuk meg, hogy bárhogyan is adunk meg 10 pozitív, 91-nél nem nagyobb egész számot, van közöttük kettő, amelyek hányadosa legfeljebb 1,5!

3. Egy szabályos hétszög csúcsait beszínezzük pirosra vagy kékre. Igazoljuk, hogy bármilyen színezés esetén van három olyan csúcs, amelyek azonos színűek, és egyenlőszárú háromszöget alkotnak!

4. Egy háromszöget akarunk felbontani kisebb háromszögekre a következő kikötéssel: minden háromszögcsúcsban (az eredeti és a kis háromszögekben is) ugyanannyi háromszögoldal találkozzon. Például az ábrán minden csúcsban 3 oldal találkozik. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?



Poronyi Gábor

Beszámoló az 1999. évi GORDIUSZ Matematika Tesztversenyről

A pécsi matematikatanárok által létrehozott MATEK Alapítvány 1999-ben harmadszor hirdette meg a kétfordulós (megyei/területi verseny, országos döntő Pécsett) GORDIUSZ Matematika Tesztversenyt a bármely típusú iskolába járó 9-12. évfolyamos diákok számára. A február 26-án megtartott első fordulóra az ország 19 megyéjéből, Budapestről és Erdélyből 7520 tanuló jelentkezett. A területi versenyek szervezését, lebonyolítását egy-egy iskola matematika munkaközössége vállalta.

A kiírás értelmében körzetenként minden évfolyamról, ha a nevezők száma elérte a 25 főt, döntőbe kerültek az első, ha a nevezők száma elérte a 150 főt, az első és második helyezettek – pontszámtól függetlenül. Eredményük alapján meghívást kaptak a döntőre azok, akik a 9. évfolyamon legalább 117 pontot, a 10. évfolyamon legalább 110 pontot, a 11. évfolyamon legalább 110 pontot, a 12. évfolyamon legalább 125 pontot szereztek. A döntőre a fentiek alapján 152 versenyző kapott meghívást.

A versenyzők mindkét fordulóban egy – évfolyamonként különböző – 30 feladatot tartalmazó feleletválasztós tesztet oldottak meg 90 perc alatt. A versenyen számológép használható, más segédeszköz nem. A megoldások értékelése számítógéppel történt, kettős rögzítéssel. A gép a versenyző pontszámát a $4 \cdot H - R + 30$ képlettel határozta. meg (ahol H a jó, R a hibás válaszok számát jelenti).

A feladatsorokat *Polcz Katalin* (9. évfolyam), *dr. Poronyi Gábor* (10. évfolyam), *Bereczkiné Székely Erzsébet* és *Gombocz Ernő* (11. évfolyam), *Kárpáti Ágnes* és *Pethőné Vendel Teréz* (12. évfolyam) állította össze, *dr. Achs Ágnes* és *Póla József* lektorálta.

Április 17-én *dr. Ujvári Jenő,* Pécs város alpolgármestere nyitotta meg a döntőt a verseny helyszínén, a Leőwey Klára Gimnáziumban. A megnyitó után a versenyzők munkához láttak. A munka befejezése után közös feladatmegoldás következett. Délután a versenyzők és kísérőik városnézésen vagy mecseki sétán, este a Pécsi Spirituálé Együttes műsorán vehettek részt. Az ünnepélyes eredményhirdetés 18-án délelőtt volt. *Póla József,* a JPTE adjunktusa mondott beszédet, a pécsi Művészeti Szakközépiskola diákjai adtak műsort. A döntő minden résztvevője oklevelet kapott, az első hat helyezett ajándékot is. A díjakat – mások mellett *dr. Kékes Ferenc,* a Baranya Megyei Közgyűlés elnöke és *Meixner András,* Pécs város Közoktatási Bizottságának elnöke adta át.

A döntő eredménye:

9. évfolyam
1. *Tóth Ágnes,* Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló
2. *Péterfalvi Ferenc,* Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
3. *Csanádi Péter,* Babits Mihály Gimnázium, Budapest

10. évfolyam
1. *Vető Bálint,* Vörösmarty Mihály Gimnázium, Érd
2. *Tóth András,* Kölcsey Ferenc Gimnázium, Zalaegerszeg
3. *Molnár Zoltán,* Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa

11. évfolyam
1. *Dezső Balázs,* Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
2. *Ivaskó György,* III. Béla Gimnázium, Baja
3. *Hegedüs Ákos,* CR Nagy Lajos Gimnáziuma, Pécs

12. évfolyam
1. *Gueth Krisztián,* Kanizsai Dorottya Gimnázium, Szombathely
   Horváth Gábor, Fazekes Mihály Gimnázium, Debrecen
3. *Lovas Róbert,* Batsányi János Gimnázium, Csongrád

Csapatverseny az első forduló alapján:

9. évfolyam
1. Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
2. Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló
3. Tóth Árpád Gimnázium, Debrecen

10. évfolyam
1. Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
2. Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
3. Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló

11. évfolyam
1. Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
2. Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
3. Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen

12. évfolyam
1. Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
2. Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
3. Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár

Ízelítőül a 9. évfolyam első fordulójának feladatsora:

1. Mennyi a különbsége a legkisebb négyjegyű pozitív és a legnagyobb háromjegyű negatív számnak?
(A) 9899 (B) 1999 (C) 1
(D) 900 (E) 1100

2. Írd fel növekvő sorrendben az első nyolc pozitív prímszámot egymás mellé! A kapott számból húzz ki nyolc számjegyet úgy, hogy a lehető legnagyobb szám maradjon! Mennyi a megmaradt számjegyek összege?
(A) 29 (B) 26 (C) 24
(D) 20 (E) 17

3. Mekkora a legnagyobb hegyesszög?
(A) nincs ilyen szög (B) 89°
(C) 89,9° (D) 89°59' (E) 89°60'

4. Szilvia az 50 m-es medencében 1000 m-en 19-et fordul. Hányat kell fordulnia ugyanezen a távon, ha 25 m-es medencében rendezik a versenyt?
(A) 9 (B) 10 (C) 38
(D) 39 (E) 40

5. Ha $H = \{0; 4\}$, melyik igaz az alábbi állítások közül?
(A) $4 \subset H$ (B) $\emptyset \in H$ (C) $0 \subset H$
(D) $0 \in \emptyset$ (E) $\emptyset \subset H$

6. Az apa és az anya együttes tömege 150 kg, a két legidősebb gyereké 90 kg, a két legfiatalabbé 70 kg. A középső gyerek 40 kg. Az egész család tömege 270 kg. Hány kg a legidősebb gyerek?
(A) 45 (B) 50 (C) 55
(D) 60 (E) 65

7. Ha Adél életkorát 2-vel megszorozzuk, 5-öt hozzáadunk, az eredményt 50-nel szorozzuk, hozzáadjuk nővére életkorát és a mostani év napjainak számát, majd le-

vonunk belőle 615-öt, 1618-at kapunk. Hány éves Adél?

(A) 14 (B)15 (C) 16
(D) 18 (E) nem számítható ki

8. Ha $0 < p < q < r$, akkor $|p - q - r| =$

(A) $q + r - p$ (B) $q - r - p$
(C) $p - q - r$ (D) $r - q - p$
(E) $p + q - r$

9. Ha 40 szám mindegyikét 20-szal növeljük, akkor átlaguk

(A) felére csökken
(B) nem változik
(C) 20-szal növekszik
(D) 40-nel növekszik
(E) 800-zal növekszik

10. Az iskola kézilabda pályáján Annától Bea 4,5 méterre, Beától Cili 7 méterre, Cilitől Dóra 4 méterre, Dórától Anna 14,5 méterre áll. Hány méterre áll Annától Cili, ha távolságuk méterben mérve egész szám?

(A) 8 (B) 9 (C) 10
(D) 11 (E) 12

11. Az $f(x) = 1999(x-1)^2(x-2)(x^2+1)$ függvény valós zérushelyeinek száma:

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 1999

12. Az N tetszőleges kétjegyű, nem nullára végződő szám. Cseréljük fel jegyei sorrendjét, és számítsuk ki a két kétjegyű szám különbségének abszolút értékét! Ha ezt minden N esetén elvégezzük, akkor hány különböző számot kapunk?

(A) 9 (B) 10 (C) 37
(D) 40 (E) 45

13. Melyik az a legszűkebb számhalmaz, amelyben az $x - y$ kivonás mindig elvégezhető, ha x és y természetes számok?

(A) a természetes számok halmaza
(B) az egész számok halmaza
(C) a racionális számok halmaza
(D) a valós számok halmaza
(E) a negatív egész számok halmaza

14. Bármely húsz egymást követő természetes szám szorzata az alábbi számok közül melyikkel osztható biztosan?

(A) 1996 (B) 1997 (C) 1998
(D) 1999 (E) 2000

15. Két sokszög oldalainak száma úgy aránylik egymáshoz, mint 1 : 2. A belső szögek összege úgy aránylik egymáshoz, mint 1 : 4. Ekkor a külső szögek összege úgy aránylik egymáshoz, mint

(A) 1 : 1 (B) 1 : 2 (C) 1 : 3
(D) 1 : 4 (E) 2 : 3

16. A $\sqrt{10^{20} - (10^{10} - 8 \cdot 10^{-10})^2}$ kifejezés értéke egészre kerekítve

(A) 0 (B) 3 (C) 4
(D) 8 (E) 16

17. Adott a síkon két pont: X és Y, melyek távolsága 5 cm. Hány olyan egyenes van a síkon, amely X-től 2 cm-re, az Y-tól 3 cm-re halad?

(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

18. Az N olyan kétjegyű szám, amelyhez ha hozzáadjuk a felét, 70-nél nagyobb számot kapunk. Ha viszont a számjegyek felcserélésével kapott kétjegyű számhoz adjuk hozzá a felét, akkor 70-nél kisebb számot kapunk. Hány ilyen N szám van?

(A) 10 (B) 17 (C) 22
(D) 46 (E) 53

19. Mekkora a legnagyobb szög legkisebb értéke az olyan nem egyenlőszárú háromszögben, amelyben minden szög fokokban vett mérőszáma egész szám?

(A) 59° (B) 60° (C) 61°
(D) 90° (E) 91°

20. Hány cm távolságra van a 12 cm sugarú kör középpontjától az a húr, amely a körvonalat két olyan részre osztja, melyek közül a nagyobbik számtani közepe a kisebbiknek és a kör kerületének?

(A) 6 (B) $6\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{3}$
(D) 8π (E) 16π

21. Ha z ($z > 0$) egyenesen arányos x^2-tel és fordítottan arányos y-nal, hogyan változik z értéke, ha y-t megháromszorozzuk, x-et pedig megduplázzuk?

(A) harmadára csökken
(B) $\frac{3}{4}$-ére csökken
(C) nem változik
(D) négyszeresére növekszik
(E) $\frac{4}{3}$-ára növekszik

22. Két kör közös húrja az egyik körbe írható szabályos háromszög, illetve a másik körbe írható négyzet egy oldala. Mekkora lehet a középpontok távolsága, ha a közös húr hossza 6?

(A) $3+\sqrt{3}$ (B) 4,73 (C) $3\sqrt{2}$
(D) $6\sqrt{2}-4$ (E) 6

23. Egy személyvonat déli 12 órakor indul Alfalváról Bétanyára 60 km/óra állandó sebességgel. Eközben Bétanyáról Alfalva felé halad egy tehervonat 40 km/óra sebességgel. Mindkét vonat egyszerre ér céljához, és ekkor kétszer olyan távol vannak egymástól, mint egy órával a találkozásuk előtt. Mikor indult a tehervonat Bétanyáról?

(A) 7 órakor
(B) 9 óra 30 perckor
(C) 10 órakor
(D) 10 óra 20 perckor
(E) 11 óra 30 perckor

24. Egy háromszög alapú gúla éleire számokat írunk. A lapokra a határoló élekre írt három szám összege kerül. Az alábbi számhatosok közül melyiket írjuk az élekre, hogy a lapokon egyforma számok legyenek?

(A) (1; 2; 3; 4; 5; 6)
(B) (1; 1; 2; 3; 4; 5)
(C) (1; 1; 2; 2; 3; 4)
(D) (1; 1; 2; 3; 3; 4)
(E) (1; 1; 2; 2; 3; 3)

25. Négy fiú: András, Béla, Csaba és Dezső együtt szoktak autózni; egyikük a sofőr, hárman utasok. Legtöbbször – összesen nyolcszor – András volt utas, Dezső pedig csak ötször, a többiek mindannyian ennél többször. Hányszor volt Dezső sofőr?

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5

26. Két pozitív számnak és legnagyobb közös osztójuknak az összege egyenlő legkisebb közös többszörösükkel. Mekkora lehet a két szám aránya?

(A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 3 : 4
(D) 1 : 3 (E) 4 : 5

27. A MATEK szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet. A számjegyekre igazak a következők: $M + A + T + E + K = 21$; $\frac{K}{M} = 2$; $A \cdot T = 21$; $M + A + T = 12$; $T + E = 8$. Mennyi az öt számjegy szorzata?

(A) 0 (B) 21 (C) 840
(D) 1999 (E) 27 354

28. Ha $3[x] = y + 7$ és $2[x - 3] = y - 1$, akkor $x + y$ az alábbiak közül melyikkel lehet egyenlő? (A $[z]$ jelenti azt a legnagyobb egész számot, amely még nem nagyobb z-nél.)

(A) 0,2 (B) 1,3 (C) 2,4
(D) 3,5 (E) 4,6

29. Legalább hány esetben kell felemelni a ceruzát és másutt folytatni a rajzolást, ha meg akarjuk rajzolni egy 8×8-as sakktábla hálózatát (kerületét és belső vonalait), ha minden vonalon csak egyszer szabad végighaladni?

(A) 13 (B) 14 (C) 18
(D) 32 (E) egyszer sem

30. Az alábbiak közül melyik szögnek nem lehet körzővel és vonalzóval megszerkeszteni a harmadát?

(A) 18° (B) 45° (C) 81°
(D) 90° (E) 120°

(A megoldókulcs: ECADE BCACD BABEA CDBCA EADED BCBAE)

KÖNYVISMERTETÉS

Imrecze Zoltánné – Reiman István – Urbán János
Fejtörő feladatok felsősöknek

Végre ismét hozzáférhető ez a kiváló feladatgyűjtemény. Az 1980-as évek közepén megjelent két kiadás után most a Szalay Könyvkiadó újra kiadta ezt a könyvet.

Ebben a feladatgyűjteményben sok feladatot a korábbi évek versenyeiről válogattak: a *Kalmár László Matematika Versenyről*, a Rádió *Törd a fejed!*, ill. a Televízió *Aki mer, az nyer!* vetélkedőjéről. A feladatok származása is mutatja, hogy a feladatgyűjtemény jól használható az 5-8. osztályos diákok versenyekre való felkészülésében/felkészítésében.

A feladatok 5 nagy témakörbe vannak besorolva: Halmazok és logika; Relációk, függvények, sorozatok; Számtan-algebra; Geometria; Kombinatorika fejezetekbe, s ezeken belül is vannak alfejezetek. A témakörök gazdagsága biztosítja, hogy a feladatgyűjteményből jól lehet feladatokat válogatni az iskolai tanórákra, az ügyesebb diákok számára „fejtörő feladatokat".

Lehetne gyöngyszemeket idézni a kb. 550 feladat közül, de aki érdeklődik a könyv iránt, annak elegendő belelapozni a feladatgyűjteménybe, s gyorsan meggyőződhet a feladatok szépségéről. Itt mindegyik feladat egy jól megszerkesztett problémát vizsgál, melynek megoldása közben hasznos tanulságokra jutunk. Ez nem meglepő, hiszen sok év munkáját gyűjti össze a feladatgyűjtemény. A feladatok több szűrésen is átestek, mire „megérdemelték", hogy kitűzzék valamelyik versenyen őket. Nyilván a versenyen szerzett tapasztalatokat a feladatgyűjtemény összeállítói beépítették a könyvbe, például a megoldások leírásánál.

Ezek barátságos feladatok. Nem olyanok, mint amilyenekkel találkozhatunk néha a versenyeken, amelyek nehezek, nagyobb technikai tudást feltételeznek, s azért tűzik ki azokat, hogy a legfelkészültebb gyerekeket kiválassza. Ha egy gyerek nem analfabéta matematikából, akkor ennek a könyvnek a feladatai felkeltik érdeklődését, lekötik figyelmét, a feladatok megoldásában sikereket érhet el.

Ez a feladatgyűjtemény segédkönyv lehetne az iskolai oktatásban. A tanítási órák differenciált foglalkozásaihoz felhasználhatók a feladatok, s nemcsak az 5-8. osztályban, de 3-4. osztályosok számára is találunk megfelelő példákat a feladatgyűjteményben. Szerintem a tagozatos osztályok számára egy kincsesbánya ez a könyv, rendszeresen használhatnák, az órákon tárgyalt témákat a könyvbeli feladatokkal jól kiegészíthetnék. A feladatgyűjtemény fejezeteit érdemes órákon feldolgozni. A diákok önállóan is felkészülhetnek néhány feladatból, ebben segítik őket a részletesen leírt feladatmegoldások.

A könyv feldolgozása alapját jelentheti az 5-8. (ill. 3-4.) osztályos szakköri munkának.

A feladatgyűjteményt nem feladatom dicsérni, csak ismertetőt szeretnék írni róla, fel-

hívni rá a figyelmet, hiszen a könyv minőségére garanciát jelentenek a kiváló szerzők, akiket nem kell bemutatni a tisztelt Olvasónak.

A mostani kiadásnál tekintettel voltak arra, hogy az Olvasó könnyebben eligazodjon ebben a 340 oldalas könyvben a fejezetek között, vagy a megoldások fellapozásánál, ezt ügyesen megoldották. Szép a könyv szedése, és az ábrák is gondos munkával készültek.

A Kiadó (Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 5310, Kisújszállás, pf. 108.) dicséretére válik a könyv kedvező ára.

Róka Sándor

Kántor Sándorné – Kántor Sándor

Nemzetközi magyar matematikai versenyek

Ebben a könyvben a szerzők a Nemzetközi magyar matematikai versenyek anyagát dolgozzák fel (1992- 1999).
A könyv ellentmondásos címe mindenkinek azonnal szemet szúr, pedig a megjelölés pontos és igaz. Valóban nemzetközi matematikai versenyekről van szó, mert a Kárpát-medence különböző országaiban élő tehetséges középiskolások versenye ez, mégis magyar, mert a résztvevők anyanyelve magyar, a verseny feladatait magyar nyelven tűzik ki és oldják meg a versenyzők. Ez a verseny az ötágú-sokágú síp szellemében született, és a matematika segítségével fűzi össze a magyarságot, a délvidéki, az erdélyi, a felvidéki, a kárpátaljai és a horvátországi középiskolásokat. Minden évben egy alkalommal hol az egyik régióban , hol az anyaországban mérik össze erejüket a versenyzők. A verseny magas színvonalú, hisz az eddigi helyezettek közül 9-en nyertek aranyérmet a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon.

A könyv szerzői évfolyamonkénti és évenkénti bontásban közlik az egyes versenyeken az eltelt 8 év alatt kitűzött feladatokat, ismertetik a feladatok megoldásait, közlik az egyes résztvevők által elért eredményeket, helyezéseket, feltüntetve a tanulók iskoláit is. A feladatok kitűzői az egyes régiók neves matematikatanárai, így a feladatok témaköre igen széles és színes, tartalmilag igen változatos. A kötet közel 200 versenyfeladatot tárgyal.

A Nemzetközi magyar matematikai versenyek című könyv hiányt pótol, a versenyfeladatok feldolgozása révén a diákok jobban fel tudnak készülni a hazai versenyekre is, illetve az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára.

Minden matematika iránt érdeklődő diáknak, minden tehetséggondozó tanárnak ajánljuk ezt a kötetet. Segítséget jelent és a könyv használhatóságát növeli, hogy a feladatok tematikus besorolását is tartalmazza. Külön érdekessége, hogy az egyes versenyeken elhangzott előadásokból, érdekes feladatokból is ízelítőt ad.
(Studium 96 Bt., Debrecen, 1999. 179 oldal. Ára: 800 Ft (+postaköltség) Megrendelhető a következő címen: Kántor, Debrecen, Pf. 12. 4010. KLTE Mat. és Inf. Int.)

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 1999. november 30.

130. Véletlenszerűen kiválasztunk négy számot az $\{1; 2; ...; 3n\}$ halmazból, ahol n 1-nél nagyobb rögzített pozitív egész szám. Mi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok összege osztható 3-mal?

Lengyel versenyfeladat

131. Legyen P az ABC szabályos háromszög tetszőleges belső pontja. Tükrözzük P-t a BC, AC és AB oldalegyenesekre, a tükörképek legyenek rendre D, E és F. Melyik háromszög területe a nagyobb, az ABC háromszögé vagy a DEF háromszögé?

132. Határozzuk meg azokat az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyekre

$$f(f(x)) + \sin x = 0$$

bármely valós x esetén!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

133. Határozzuk meg mindazokat a pozitív egész n számokat, amelyekre a

$$P_n(x) = x^{2n} + (x+1)^{2n} + 1$$

polinom osztható a $T(x) = x^2 + x + 1$ polinommal!

Osztrák versenyfeladat

134. Tekintsük a következő egyenletet:

$$1 + z_1 + z_1z_2 + z_1z_2z_3 + ... + \\ + z_1z_2z_3...z_n = 0 \qquad (1)$$

Igazoljuk, hogy $n > 1$ esetén

a) egyenletünknek végtelen sok, páronként különböző, azonos abszolút értékű komplex számból álló $(z_1, z_2, ..., z_n)$ megoldása van;

b) ha $(z_1, z_2, ..., z_n)$ megoldása (1)-nek, és $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = r$, akkor

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} < r < 2 - \frac{1}{2^n}!$$

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (115-119. feladatok)

115. Van-e megoldása a páratlan pozitív egészek körében az

$$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2$$

egyenletnek?

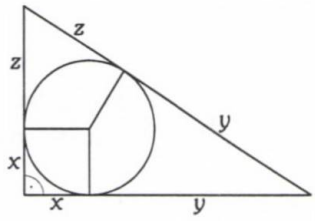
I. megoldás: Egyenletünk a négyzetre emelések elvégzése, majd ekvivalens átalakítások után az

$$(x+y)(x+z) = 2yz \qquad (2)$$

alakot ölti. (2)-ben a bal oldal 4-gyel osztható, hiszen két páros szám szorzata, míg a jobb oldal két páratlan szám szorzatának kétszerese, tehát csak 2-vel osztható. Ebből adódóan tehát nincs az egyenletnek páratlan egész megoldása.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: (2)-höz eljuthatunk úgy is, hogy az *1. ábrán* látható derékszögű háromszög területét írjuk fel kétféleképpen.



1. ábra

László Sándor, Szombathely

II. megoldás: Használjuk fel a pitagoraszi számhármasokat előállító általános formulákat. Ezekkel

$$x + y = k \cdot (m^2 - n^2),$$
$$x + z = k \cdot 2mn,$$
$$y + z = k \cdot (m^2 + n^2),$$

ahol m és n különböző paritású relatív prím pozitív egészek, és $m > n$, k pedig tetszőleges pozitív egész. Mivel x, y és z páratlanok, ezért $k(m^2 - n^2)$ páros. m és n ellenkező paritásúak, ezért k páros. Viszont

$$x = \frac{1}{2}\left[(x+y)+(x+z)-(y+z)\right] = k\left(mn - n^2\right),$$

ahonnan adódik, hogy k páratlan. Ez ellentmondás, tehát az egyenletnek nincs páratlan egész megoldása.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 12.

116. Mutassuk meg, hogy ha a, b és c 1-nél nagyobb pozitív valós számok, r pedig pozitív valós szám, akkor

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3 \cdot 2^r!$$

Megoldás: A feltételek miatt a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés mindegyik tagja pozitív, ezért alkalmazható a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq$$
$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{(\log_a bc)^r \cdot (\log_b ca)^r \cdot (\log_c ab)^r} \qquad (3)$$

A jobb oldal tényezőire alkalmazva a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot, az így kapott két pozitív tagból álló összegekre különkülön ismét alkalmazható a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség.

$$3 \cdot \left(\sqrt[3]{(\log_a b + \log_a c)(\log_b c + \log_b a)(\log_c a + \log_c b)}\right)^r \geq$$
$$\geq 3 \cdot \left(\sqrt[3]{2^3 \sqrt{\log_a b \cdot \log_a c} \cdot \sqrt{\log_b c \cdot \log_b a} \cdot \sqrt{\log_c a \cdot \log_c b}}\right)^r \qquad (4)$$

Felhasználva, hogy $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$, (4) jobb oldala éppen $3 \cdot 2^r$, tehát a kívánt egyenlőtlenséget beláttuk. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha (3)-ban és (4)-ben is egyenlőség teljesül, azaz, ha $a = b = c$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

117. Igazoljuk, hogy bármely háromszög felbontható n darab egyenlő szárú háromszögre, ahol n 4-nél nem kisebb természetes szám!

Megoldás: Minden derékszögű háromszög két egyenlő szárú háromszögre bontható, mégpedig az átfogóhoz tartozó súlyvonal behúzásával.

Tetszőleges háromszögnek van olyan magassága, amely a háromszög belsejében halad, így minden háromszög felbontható két derékszögű háromszögre.

Az előbbi két megállapításból adódik, hogy bármely háromszög felbontható 4 darab egyenlő szárú háromszögre.

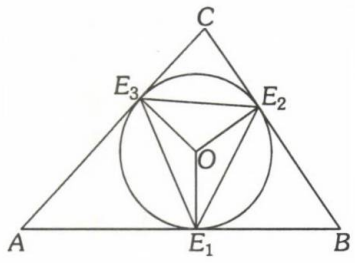
Ha egy tetszőleges háromszög felbontható n darab egyenlő szárú háromszögre, akkor felbontható $n + 3$ darab egyenlő szárú háromszögre is. Ez utóbbi könnyen megvalósítható úgy, hogy egy, a felbontásban résztvevő háromszöget 4 darab egyenlő szárú háromszögre bontunk.

A feladat állításának igazolásához tehát már csak azt kell belátni, hogy bármely háromszög felbontható 4, 5, illetve 6 egyenlő szárú háromszögre.

Az $n = 4$ esetet már láttuk.

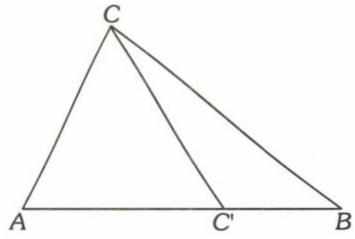
Az $n = 6$ eset is megvalósítható például úgy, hogy tekintjük a háromszög beírt körének középpontját, és az oldalakkal vett érintési pontjait. A *2. ábráról* könnyen látható, hogy a felbontásban szereplő háromszögek valóban egyenlő szárúak, ugyanis $OE_1 = OE_2 = OE_3$ a beírt kör sugara, valamint az egyes csúcsoktól

az érintési pontokig terjedő szakaszok egyenlő hosszúak.



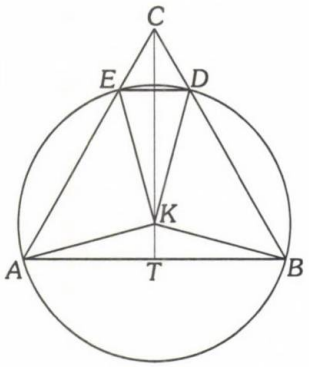
2. ábra

Az $n = 5$ eset vizsgálatát két részre bontjuk. Előbb tekintsünk egy nem szabályos háromszöget, és tételezzük fel, hogy ebben $AC < AB$. (*3. ábra*) Legyen $C' \in AB$ olyan, hogy $AC = AC'$. A BCC' háromszög felbontható 4 darab egyenlő szárú háromszögre, így az ABC háromszög felbontható 5 darab egyenlő szárú háromszögre.



3. ábra

Meg kell még mutatni, hogy a szabályos háromszög is felbontható 5 darab egyenlő szárú háromszögre. Evégett tekintsük az ABC háromszög CT magasságának egy olyan K pontját, amelyre $AK < KC$. (*4. ábra*)



4. ábra

A K középpontú, AK sugarú kör az AC oldalt az E, a BC oldalt a D pontban metszi. Ekkor a szimmetria miatt a CED háromszög szabályos, a többi 4 háromszög pedig a konstrukció miatt egyenlő szárú.

A feladat állítása az elmondottakból következik.

Csorba Ferenc, Győr

Megjegyzés: Csak az egyenlő szárú derékszögű háromszög bontható fel bármely pozitív egész n esetén n darab egyenlő szárú háromszögre.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 11.

118. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k^2}}$ irracionális!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: A feladatbeli végtelen sor konvergens, ugyanis pozitív tagú, továbbá $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k^2}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ miatt korlátos. Jelölje A a tekintett összeget, és képzeljük el ezt kettes számrendszerben felírva. Ha A racionális szám lenne, akkor kettes számrendszerbeli alakja végtelen szakaszos kettedestört lenne, azaz a „kettedesvessző" után valahonnan a 0 és 1 számjegyekből álló szakasznak kellene ismétlődnie. Ehhez azonban az volna szükséges, hogy az A fenti felírásában a 2 hatványkitevői valahonnan kezdve számtani sorozatot alkossanak. Ez nyilvánvalóan lehetetlen, hiszen a 2 hatványkitevői A-ban nem mások, mint a pozitív egész számok négyzetei, ezek pedig nem alkotnak számtani sorozatot.

Ezzel beláttuk, hogy A irracionális szám.

Bíró Bálint, Eger
Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 8.

119. Határozzuk meg azon n-jegyű természetes számok számát, amelyek csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazhatják, és amelyekben bármely két szomszédos számjegy különbsége 1!

Megoldás: Jelöljük a kívánt tulajdonságú n-jegyű természetes számok számát $T(n)$-nel. Ezek közül az i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) számjegyre végződők számát jelölje $T(n, i)$.

Megmutatjuk, hogy $T(n) = 3 \cdot T(n-2)$, ha $n \geq 4$. Teljes indukcióval dolgozunk. Elegendő megmutatnunk, hogy bármely $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ esetén $T(n, i) = 3 \cdot T(n-2, i)$. Sőt, mivel a feladat az 1-5, illetve 2-4 szempontjából szimmetrikus, ezért elegendő a bizonyítást $i = 1, 2, 3$ esetén elvégezni.

Tegyük fel, hogy $(n-1)$-ig már beláttuk az állítást, és nézzük n-re.

$$\begin{aligned} T(n, 1) &= T(n-1, 2) = T(n-2, 1) + T(n-2, 3) = \\ &= T(n-2, 1) + T(n-3, 2) + T(n-3, 4) = \\ &= T(n-2, 1) + T(n-2, 1) + T(n-2, 5) = \\ &= 3 \cdot T(n-2, 1) \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy n-jegyű 1-re végződő megfelelő szám szükségképpen ugyanannyi lesz, mint $(n-1)$-jegyű 2-re végződő, és az n-jegyű 3-ra végződő megfelelő számok száma az $(n-1)$-jegyű 2-re és 4-re végződő számok számának összegeként adódik az n-edik számjegy megválasztásának lehetőségei miatt. Figyelembe vettük továbbá a fent említett szimmetriát.

Hasonló megfontolásokkal

$$\begin{aligned} T(n, 2) &= T(n-1, 1) + T(n-1, 3) = \\ &= 3 \cdot T(n-1, 1) = 3 \cdot T(n-2, 2), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} T(n, 3) &= T(n-1, 2) + T(n-1, 4) = \\ &= T(n-2, 1) + 2 \cdot T(n-2, 3) + T(n-2, 5) = \\ &= T(n-3, 2) + 2 \cdot T(n-2, 3) + T(n-3, 4) = \\ &= 3 \cdot T(n-2, 3). \end{aligned}$$

Ezzel a megoldás elején kimondott állítást igazoltuk.

Egyszerű számolással adódik, hogy $T(1) = 5$, $T(2) = 8$, $T(3) = 14$.

A bizonyított segédállítás felhasználásával kapjuk, hogy

$$T(n) = \begin{cases} 5, & \text{ha } n = 1 \\ 8 \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}, & \text{ha } n > 1 \text{ és } n \text{ páros} \\ 14 \cdot 3^{\frac{n-3}{2}}, & \text{ha } n > 1 \text{ és } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Koncz Levente, Budapest

A megoldók száma: 8.

A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (115-119.); Boda Miklós, Pécs (116.); Csorba Ferenc, Győr (115-117., 119.); Dályay Pál Péter, Szeged (115. 4 mód, 116., 117., 118. 2 mód, 119. 3 mód); Horváth Géza, Zselíz (115.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (115. 2 mód, 116-118.); Koncz Levente, Budapest (115-119.); László Sándor, Szombathely (115-118.); Marosszéky Gábor, Salgótarján (115-118.); Nagy Erzsébet, Szeged (115. 2 mód, 116., 117., 119.); Simon József, Csíkszereda (115-117., 119.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (115. 4 mód, 117., 118. 2 mód, 119.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (115-119.).

MOZAIK
MÓDSZERTANI NAPOK
1999/2000

Az 1999/2000-es tanévben is szeretettel várjuk az érdeklődő pedagógusokat a MOZAIK MÓDSZERTANI NAPOK rendezvénysorozatán. A részletes programot a folyóirat következő számában közöljük, valamint elküldjük minden iskolába.

DECEMBER 7. • SZEGED
Arany János Általános Iskola

DECEMBER 10. • PÉCS
Testvérvárosok Terei Általános Iskola

DECEMBER 17. • BUDAPEST
Berzsenyi Dániel Gimnázium

JANUÁR 13. • SZOMBATHELY
Dési Huber Általános Iskola

JANUÁR 14. • SZÉKESFEHÉRVÁR
Velinszky László Általános Iskola

JANUÁR 20. • MISKOLC
Jókai Mór Általános Iskola

JANUÁR 21. • HAJDÚSZOBOSZLÓ
Bárdos Lajos (4. sz.) Általános Iskola

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 47-01-01, 488-282
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73., Tel.: (62) 485-522

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERSEGHY KÖNYVTÁR 2

Mire jó (még) a terület?

(Fazakas Tünde)

A függvényfogalom fejlődése és továbbfejlesztése

(Hack Frigyes)

„Nyitott" és „nyitható" feladatok a tanárképzésben és a matematikaoktatásban

(Ambrus Gabriella)

Egy különleges sorozatról

(Holló-Szabó Ferenc)

VII. ÉVFOLYAM 1999 5

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 880 Ft
A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

TARTALOM

Mire jó (még) a terület?
Fazakas Tünde
vezető tanár, Budapest

A függvényfogalom fejlődése és továbbfejlesztése
Dr. Hack Frigyes
Ph. D. tanár, Budapest

Gondolatok az I. Matematikai Versenyvizsgáról
Dr. Kiss Sándor
főiskolai docens, Nyíregyháza
Róka Sándor
főiskolai docens, Nyíregyháza

Egy különleges sorozatról
Holló-Szabó Ferenc
doktorandusz, Budapest

Hírek versenyekről

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve, két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Fazakas Tünde

Mire jó (még) a terület?

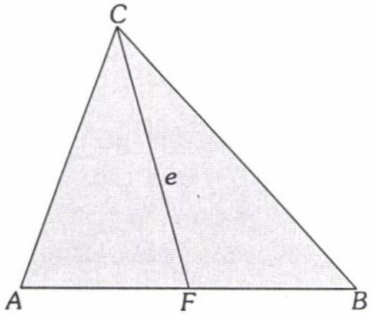
A terület fogalmának kialakítása már alsó tagozatban megkezdődik, s még a gimnáziumban sem ér véget. Sokszor sokféle területet számíttatunk ki a tanulókkal, viszonylag ritkán használjuk bizonyítás közben, a bizonyítás eszközeként. Öt, önmagában is érdekes állítást bizonyítunk. Ezek között van ismert is, van olyan is, amely egy gyakran használt állítás megfordítása. Ezek segítségével bebizonyítjuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Utána egy összetett feladatban használjuk kis állításainkat és megfordításukat. A feladat bizonyítása még gimnáziumban is nehéz, bár általános iskolai ismeretekkel megoldható.

1. állítás:

Az ABC háromszög területét a C csúcson átmenő e egyenes akkor és csak akkor felezi, ha e az AB oldalt az F felezőpontban metszi, azaz e az ABC háromszög súlyvonala.

Bizonyítás:

A két „kis" háromszögnek közös a magassága. Így területük pontosan akkor egyenlő, ha alapjuk is, azaz F felezőpont.

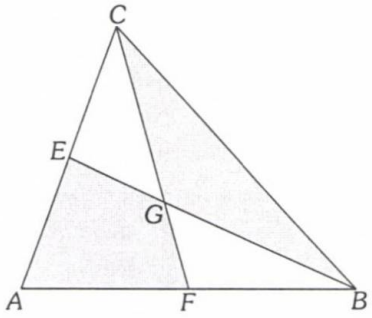


2. állítás:

ABC háromszög AB, ill. AC oldalának felezőpontja rendre F és E. FC és BE metszéspontja G. Ekkor $t_{AFGE} = t_{GBC}$ és $t_{FBG} = t_{EGC}$.

Bizonyítás:

$\frac{1}{2}t_{ABC} = t_{AFC} = t_{FBC} = t_{EBC}$. A második és a negyedik tagból t_{EGC}-t, a harmadik és negyedik tagból t_{GBC}-t levonva kapjuk a keresett egyenlőségeket.



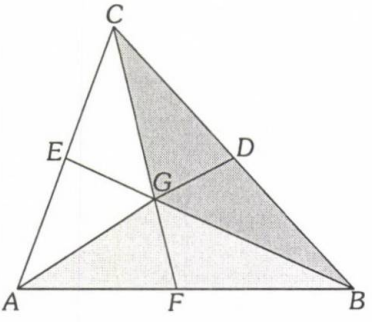
Tétel:

A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás:

Az ABC háromszög BE és CF súlyvonalai a G pontban metszik egymást. Húzzuk meg az AG szakaszt! Az AGB háromszögben GF, AGC háromszögben EG súlyvonal, így az 1. állítás alapján $t_{AFG} = t_{FBG}$, $t_{AGE} = t_{GCE}$. $t_{ABG} = t_{AFG} + t_{FBG} = 2t_{FBG} = 2t_{EGC} = t_{EGC} + t_{AGE} = t_{AGC}$ a 2. állítás segítségével. Most húzzuk meg GBC háromszög GD súlyvonalát! $t_{GBD} = t_{GDC}$ (1. állítás). A két egyenlőség összegeként kapjuk, hogy az AGD töröttvonal felezi ABC három-

szög területét. Az ABC háromszögben AD súlyvonal, ezért AD is felezi a háromszög területét, tehát G pont az AD súlyvonalra esik, azaz mindhárom súlyvonal átmegy a G ponton.



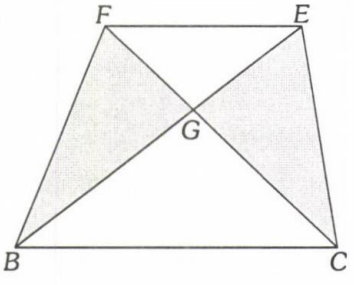
3. állítás:

Az $FBCE$ trapézban $BC \| FE$, a BE és FC átlók metszéspontja G. Ekkor $t_{FBG} = t_{EGC}$. Megfordítva: Az $FBCE$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja G. Ha $t_{FBG} = t_{EGC}$, akkor a négyszög trapéz, és $BC \| FE$.

Bizonyítás:

Mivel $BC \| FE$, ezért $t_{BCF} = t_{BCE}$. A közös BCG háromszög kerületét kivonva kapjuk az állítás első felének a bizonyítását.

Fordítva: a közös BCG háromszög területét hozzáadva az egyenlő területekhez, a $t_{BCF} = t_{BCE}$ egyenlőséget kapjuk. Innen a két háromszög BC-hez tartozó magassága megegyezik, így $BC \| FE$.



4. állítás:

A $BCEF$ trapéz alapja BC és EF, átlóinak metszéspontja G. G-n keresztül párhuzamost húztunk az alapokkal, ez a szárakat a J és K pontokban metszi. Ekkor G felezi a JK szakaszt.

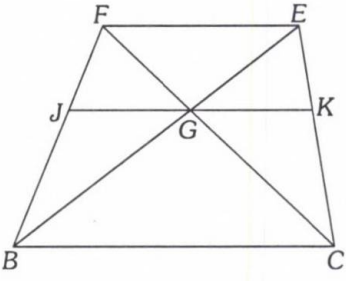
Bizonyítás:

A JG, illetve GK szakaszok két-két részre bontják a fenti háromszögeket. $t_{FBG} = t_{FJG} + t_{JBG} = \frac{JG}{2}(m + m')$, ahol m a JGF, m' a JGB háromszög JG-hez tartozó magassága.

$t_{EGC} = t_{EGK} + t_{GCK} = \frac{GK}{2}(m + m')$, mivel $JK \| FE \| BC$.

A harmadik állításból tudjuk, hogy $t_{FBG} = t_{EGC}$. Így $JG = GK$.

Következmény: $t_{JGF} = t_{GKE}$, $t_{JGB} = t_{GKC}$.



5. állítás:

Tegyük fel, hogy a $BCEF$ trapéz BF és CE szárai nem párhuzamosak, metszéspontjuk H, a trapéz átlói G-ben metszik egymást, a HG egyenes az alapokat L, illetve M pontokban metszi. Bizonyítandó, hogy L az FE, M a BC szakasz felezőpontja.

Bizonyítás:

Húzzunk G-n keresztül párhuzamost BC-vel! A szárakat J-ben és K-ban metszi. A negyedik állításból tudjuk, hogy $JG = GK$, így $t_{JGH} = t_{GKH}$. Az előző állítás következménye-

ként kaptuk, hogy $t_{JGF} = t_{GKE}$, különbségükként adódik a $t_{HFG} = t_{HGE}$ egyenlőség.

$t_{HFG} = \frac{FL}{2}(m + m'')$, ahol m az FLH, m'' az FLG háromszög FL-hez tartozó magassága.

$t_{HGE} = \frac{LE}{2}(m + m'')$, mivel a „kis" háromszögek magassága közös.

A területek egyenlőségéből $FL = LE$ következik.

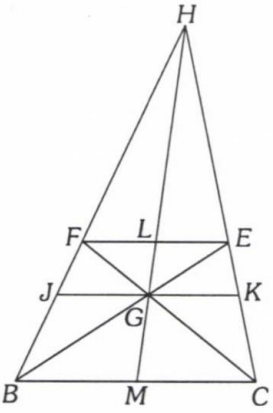
$t_{JGH} = t_{GKH}$, $t_{JGB} = t_{GKC}$ (Következmény). Összegükként kapjuk: $t_{HBG} = t_{HGC}$.

$t_{HBG} = \frac{BM}{2}(n - m')$, ahol n a BMH, m' a BMG háromszög BM-hez tartozó magassága.

$t_{HGC} = \frac{MC}{2}(n - m')$, mivel a „kis" háromszögek magassága közös.

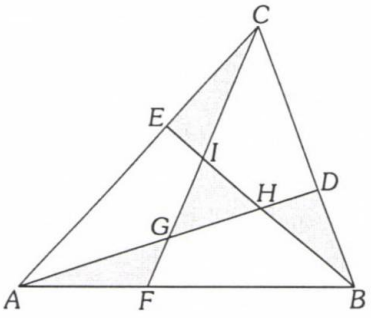
A két terület egyenlőségéből $BM = MC$ következik. ($n > m'$)

Megjegyzés: HG felezi a $GEHF$ négyszög területét.



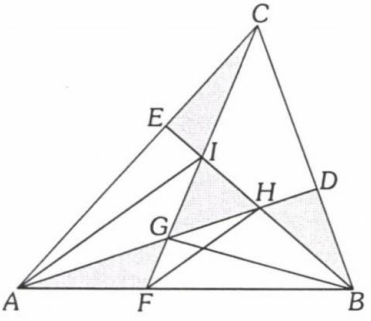
Feladat:

Az ABC háromszög csúcsain áthaladó egyeneseket húztunk az ábra szerint. A négy kis háromszög területe egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a három négyszög területe is egyenlő egymással!



Bizonyítás:

$t_{AFG} = t_{GHI} \Rightarrow AFHI$ négyszög trapéz (3. állítás) $\Rightarrow BG$ egyenese felezi az $FBHG$ négyszög területét (megjegyzés), $t_{GFB} = t_{GBH}$. $t_{ABG} = t_{AFG} + t_{FBG} = t_{HBD} + t_{GBH} = t_{GBD} \Rightarrow BG$ az ABD háromszög súlyvonala (1. állítás) $\Rightarrow G$ felezi az AD szakaszt $\Rightarrow CG$ az ADC háromszög súlyvonala $\Rightarrow t_{AGC} = t_{GDC}$ (1. állítás). Mindkét háromszög területéből egy kis háromszögnyi területet elvéve kapjuk, hogy $t_{AGIE} = t_{IHDC}$, azaz két négyszög területe egyenlő. A bizonyítást megfelelő betűcserével elvégezve kapjuk, hogy mindhárom négyszög területe egyenlő.



Dr. Hack Frigyes

A függvényfogalom fejlődése és továbbfejlesztése

Mottó: Eppur sí muove! (Galileo Galilei)

Tanári munkám során legvonzóbb feladatot a vizsgáztatás jelentette, mert ekkor vált láthatóvá az elvégzett oktatói munka eredménye. Több éven keresztül (voltak azok évtizedek is) vettem részt matematika szakos tanárok, programozó matematikusok, informatika szakos tanárok egyetemi felvételi vizsgáin. A szakválasztás következtében jogosan feltételeztem, hogy ezek a jelöltek a középiskolában nem tekintették kötelező rossznak a matematikát, hanem érdeklődéssel tanulták. Ezért csodálkoztam, hogy arra a kérdésre: „Mi a függvény?" gyakran bizonytalan választ kaptam, s a legjobban felkészült diákok is csak annyira jutottak, hogy elmondták, amit az akkor általánosan használt tankönyvekből – [17], [19] – tanultak. Ez vázlatosan így fogalmazható: „a függvényt alapfogalomnak tekintjük", illetve „egy függvényt úgy adunk meg, hogy megadunk két halmazt és egy szabályt, mely az első halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzárendeli a másik halmaz egy elemét". Amikor kézbe vettem tanult kolléganőm tankönyveit és tanári kézikönyveit [20], megtudhattam, hogy a „tanulók absztrakciós szintje nem teszi lehetővé, hogy a függvényt definiáljuk" a fentebbi idézet csupán a függvény megadásának definíciója(!).

Amikor eddig jutottam, kollégákat, tanárokat, matematikusokat, mérnököket kezdtem faggatni, és – gondolom senkit nem lep meg ez a közlésem – rendkívül bizonytalan és főleg sokféle, egymásnak nem ritkán ellentmondó válaszokat kaptam. (A leggyakoribb szó e visszaemlékezésekben a: „tulajdonképpen".) Következő lépésben az irodalomhoz fordultam a tisztánlátás, a probléma tisztázása érdekében. Az átnézett források közül csak azokat soroltam fel az irodalomjegyzékben, amelyekből idézek vagy legalább utalok a koncepciójukra. Remélem, hogy az Olvasónak ugyanolyan meglepő lesz ezek elemzése, mint nekem, és hasonló következtetésre jut a tanulságok levonásával.

A függvényfogalom fejlődésének története

Idézettel kezdem. *Gottlob Frege* az 1891-ben publikált **Függvény és fogalom** c. monográfiájában [11] ezt írja: „Egy tudományos kifejezés akkor lép föl először határozott jelentéssel, amikor valamely törvényszerűséghez van szükségünk rá. Ez a helyzet a függvény esetében a felsőbb analízis fölfedezésekor következett be. Ekkor volt szó először olyan törvények felállításáról, amelyek függvényekre általánosan érvényesek. A felsőbb analízis felfedezésének korába kell tehát visszamennünk, ha tudni akarjuk, hogy mit értettek eredetileg a 'függvény' szón. Erre a kérdésre körülbelül a következő feleletet kaphatjuk: 'x egy függvényén olyan számtani kifejezést értünk, amely tartalmazza x-et, olyan formulát, mely az x betűt magában foglalja.' "

A fejlődéstörténet pontosításához tartoznak az alábbi adatok, melyeket a matematika történetével foglalkozó munkákból [36] , [37], [38] és egyes tankönyvekben – pl. [15], [20], [42] stb. – szereplő olvasmányokból tudhatunk meg.

Descartes (1596–1650) kezdte meg a változó fogalmának a kialakítását, erőteljesen hangsúlyozva a függvénynek mint *megfeleltetésnek* általános elvét.

Leibniz (1646–1716) használta először *a függvény (functio)* elnevezést, de az első függvényfogalom távol áll a ma elfogadottól.

Johann Bernoulli (1667–1748) azt ajánlotta 1718-ban, hogy tekintsük a függvényt egyszerűen analitikus kifejezésnek.

Euler (1707–1783) is erre az álláspontra helyezkedett, amikor a következő meghatározást adta: „A változó mennyiség függvénye analitikus kifejezés, mely ebből a változó mennyiségből és számokból vagy állandó mennyiségekből van valamilyen módon összetéve." *Euler* a függvények kifejezés szerinti osztályozásának (algebrai – transzcendens, racionális irracionális stb.) elvét kiegészítette a függvények tulajdonságai szerint való osztályozásával: egyértékű és többértékű, a páros és páratlan stb. Erre természetesen csak a valós függvények osztályánál van lehetőség.

A 19. században felerősödtek azok a korábban is ismert és hangoztatott nézetek, melyek a *hozzárendelés* fontosságát kiemelték.

Lacroix (1765–1843) írja 1810-ben: „Minden mennyiséget, amelynek értéke egy, vagy több más mennyiségtől függ, ez utóbbiak függvényének nevezzük attól függetlenül, hogy tudjuk-e vagy sem azt, hogy milyen műveletet kell végeznünk ahhoz, hogy ez utóbbiakból megkapjuk az előbbit."

Fourier (1768–1830) szerint: „Az $f(x)$ függvény teljesen tetszőleges függvényt jelent, vagyis a nulla és valamilyen x mennyiség között található valamennyi x értéknek megfelelő, általános törvénynek alárendelt vagy alá nem rendelt értékek sorozatát."

Dirichlet (1805–1859) klasszikusnak ítélt megfogalmazása 1837-ből való. „Azt mondjuk, hogy y az x egyértékű függvénye, ha x minden szóba jövő értékéhez y-nak meghatározott értéke tartozik "

Lobacsevszkij (1792–1856) ehhez hasonló fölfogást képvisel. De különösen figyelemreméltó a hozzárendelés módjáról megfogalmazott nézete: „A függvény értékét vagy analitikus kifejezéssel, vagy olyan föltétellel lehet megadni, amely minden szám kipróbálására és közülük egy kiválasztására ad módot, és végül lehetséges, hogy létezik összefüggés, de ismeretlen marad."

Eléggé köztudott, hogy a matematika 16-19. századi fejtődésére nagy hatást gyakorló tudósok között sok a polihisztor, és nagyon sok matematikai fogalom – így a függvényfogalom kialakulását is – egy-egy természettudományos vagy műszaki probléma megoldására tett próbálkozások segítették elő. Erre utal a következő jelenkori idézet is: „A természettudományok, különösen a fizika, az egymással összefüggő mennyiségek kapcsolatának jelentékenyebb részét a matematika nyelvén 'képletek'-kel írják le. E képletek nem egyebek, mint függvények." [1]

Mielőtt csokorba gyűjteném az elfogadott-használt definíciókat, engedjenek meg egy etimológiai megjegyzést. Úgy tudom, hogy egyedül a magyar szaknyelv használja a függőséget kiemelő, a *függ* igéből származó *függvény* szót. Az európai nyelvekben a latin *functio* szóból származtatott terminus technikust használják: *fonction, Funktio, funzione, función, funkcija* stb. Azonban a *fungor, fungi, functus sum* szótári alakkal megadott latin ige alapjelentéseinek egyike sem utal függésre. Azt a *pendere* és *dependere* igék fejezik ki. Ismert származékaik: *dependens, dependencia, independent* stb. A *functio* köznyelvi jelentései közül a tevékenykedik, működik jelentésű *funkcionál,* a vele kapcsolatos főnév a *funkcionárius* és a hivatalt, hivatást jelentő *funkció* a magyar nyelvben is használt, meghonosodott idegen szavak. A nyelvújítás második hullámában, a 19. században megalkotott *függvény* szavunk is akadálya lehet annak, hogy a fogalom modern definícióját a diákokhoz közelebb vigyük, és azt a bizonyos „valami függ valamitől", esetenként „valami okozója valaminek" szemléletet elfelejtessük. Gondolom, ezért foglalkozik *Császár Ákos* egyetemi tankönyvében [8] a szó magyarázatával: „Ezek a relációk annyiban speciális szerkezetűek, hogy minden $x \in X$-hez pontosan egy olyan $y \in Y$ tartozik, amelyre xRy áll. Ezért $x \in X$ megadása egyértelműen meghatározza azt az $y \in Y$ elemet, amelyre xRy teljesül, más szóval az ilyen y egyértelműen függ az x megadásától. Ez a körülmény indokolja, hogy az ilyen relációkat függvényeknek nevezik."

Mi tehát a függvény?

Gondolom, minden Olvasóm tanulmányai során a függvényekkel egy-egy definíció meghatározás vagy leírás-értelmezés segítségével ismerkedett meg. Ezt az értelmezést azután a felsőfokú tanintézetben az analízis tanára vagy pontosította, vagy „modernizálta". Bizonyára hasznos és meglepő lesz a sokféle variánst így együtt látni még akkor is, ha közöttük néhány hasonlóság is felfedezhető.[1]

FÜGGVÉNY = KIFEJEZÉS

Az Eulertől és *Johann Bernoullitól* származó (csak számargumentumú függvényeket feltételező) felfogás, melyet már a 19. sz. végén *Frege* is kritizált, elég hamar kikopott. Sajnos még a 20. sz. második felében is kísértett. Itt csak egy forrás:

[47]: „Minden algebrai kifejezés a benne szereplő változók függvénye."

FÜGGVÉNY = VÁLTOZÓ = MENNYISÉG

Ez a *Dirichlet*-féle definíció variálása. Jellemző a 20. század szak- és tankönyveire. A megfogalmazások fogalmilag megegyeznek, csak a mondatszerkezetek térnek el. Vannak azonban köztük olyanok, melyek különböznek a lényeg, a kapcsolat lényegének meghatározásában. Némelyik úgy fogalmaz, hogy **y az x-hez tartozik,** másik azt mondja, hogy **y függ az x-től.** Feltűnik még a „többértékű" függvény elismerése is.

[42]: „Azt mondjuk, hogy y az x egyértékű függvénye, ha x minden szóbajövő értékéhez y-nak meghatározott értéke tartozik."

[5]: „Ha két változó, pl. y és x oly összefüggésben van egymással, hogy y-nak értékei az x értékeitől függnek, akkor az y-t az x *függvényének (functio)*, az x-et pedig *független változónak* mondjuk."

[44]: „A függvény olyan mennyiség, amelynek értéke más változó mennyiség v. mennyiségek értékétől függ."

[1]: „Az y változót akkor nevezzük az x változó függvényének, ha x minden megengedhető értékéhez y-nak egy meghatározott értéke vagy több meghatározott értéke tartozik."

[7]: „Előfordulhat, hogy egy x változó minden értékéhez egy másik y változó valamely meghatározott értéke tartozik. Ebben az esetben y-t az x függvényének nevezzük."

[6]: „Az y változó mennyiséget akkor nevezzük az x változó mennyiség függvényének, ha minden egyes szóbajövő értékéhez y-nak meghatározott értéke vagy több meghatározott értéke tartozik."

[30]: „Azt mondjuk, hogy y az x egyértékű függvénye, ha x minden szóba jövő értékéhez y-nak meghatározott értéke tartozik."

„Az y az x-nek többértékű függvénye, ha x bármely szóba jövő értékéhez y-nak több meghatározott értéke is tartozhat."

[13]: „Azt mondjuk, hogy y az x függvénye, ha 1) tudjuk, hogy x milyen értékeket vehet fel, azaz adott a függvény értelmezési tartománya és 2) az x minden megengedett értékének pontosan egy y *érték felel meg."*

[35]: „Ha két változó mennyiség, x és y oly vonatkozásban áll egymáshoz, hogy x minden bizonyos Y számtartományhoz tartozó értékének megfelel y-nak egy vagy több értéke, akkor y-t az x független változó függvényének nevezzük."

[3]: „Ha az x változó minden megengedett értékéhez az y változónak meghatározott értékét (vagy esetleg értékeit) rendeljük hozzá, akkor azt mondjuk, hogy y *függvénye* az x-nek: $y = f(x)$, vagy $y = y(x)$."

[39]: „Az y az x függvénye, ha minden tekintetbe vehető értékéhez y-nak egy

[1] Az idézetekben, melyek egyetemi és középiskolai tankönyvekből, kézikönyvekből, enciklopédiákból, származnak, a lényeg megsértése nélkül egy változtatást alkalmazok: azonos értelemben használt fogalmakat azonos betűvel jelölöm, megkönnyítve ezzel az összehasonlítást. A két halmaz X és Y, az elemeik, a változók x és y, a függvény, illetve reláció szimbóluma f és R.

vagy több meghatározott értéke tartozik."

[17]: „Ha ... valamilyen számítási utasítás segítségével az X halmaz minden x pontjához hozzárendelünk egy meghatározott másik y számértéket, akkor azt mondjuk, hogy y az x (komplex) változó (egyértékű) *függvénye.*"

[45]: „A függvény egy olyan változó mennyiség, amelynek értéke egy másik mennyiség értékétől függ."

[26]: „Ha két mennyiség között olyan kapcsolat van, hogy az egyiknek az értéke a másik értékét egyértelműen meghatározza, akkor azt mondjuk, hogy a második mennyiség függvénye az elsőnek."

FÜGGVÉNY = LEKÉPEZÉS = ÖSSZEFÜGGÉS = HOZZÁRENDELÉS

[41]: „Két matematikai rendszert a köztük levő – és bizonyos feltételeket kielégítő – megfeleltetéssel együtt *leképezésnek* nevezzük. Az egyik rendszerről egy másik rendszerre történő áttérés egy jól definiált módját *függvénynek* nevezzük."

[45]: „A függvény Dirichlet definíciója szerint egy olyan törvényszerű összefüggés, amely bizonyos számok mindegyikéhez hozzárendel egy v. több számot."

[26]: „... Az első mennyiséget független változónak, a másodikat függő változónak, a kettőjüket összekapcsoló összefüggést függvénynek nevezzük."

[34]: „Ha az X halmaz minden elemének megfeleltetjük az Y halmaz valamely elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük."

[31]: „*Figyelem:* FÜGGVÉNY = LEKÉPEZÉS. E szavak szigorúan ugyanazt jelentik." – „Az f reláció függvény vagy leképezés akkor és csak akkor, ha minden $x \in \mathrm{dom} f$-hez egyetlen olyan $y \in \mathrm{im} f$ létezik, hogy $(x, y) \in f$."

[46]: „A function is a rule which attributes to every number x from set X one definite number y."

[24]: „Függvénynek nevezünk minden olyan megfeleltetést (hozzárendelést, leképezést), amely egy (nem üres) halmaz (X) minden eleméhez egy másik (nem üres) halmaz (Y) egy-egy elemét hozzárendeli." <Ugyanez [14]-ben is.>

[46]: „A megfeleltetést más szóval relációnak mondjuk, az egyértelmű megfeleltetést pedig függvénynek vagy leképezésnek."

[15]: „Adott két halmaz, X és Y. Ha az X halmaz minden egyes eleméhez valamilyen módon hozzárendeljük az Y halmaznak egy-egy elemét, akkor a hozzárendelést függvénynek nevezzük."

[9]: „Rendeljünk hozzá az X halmaz minden egyes eleméhez az Y halmaz pontosan egy elemét. Ezt a hozzárendelést az X halmazon értelmezett függvénynek (leképezésnek) mondjuk."

[48]: „We say that two variable quantities x and y are connected by a *functional relation* if each value that one quantity can take is associated one or several definite values of the other."

[33]: „Ha az X halmaz minden elemének megfeleltetjük az Y halmaz valamely elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük."

[4]: „Ist die Abbildung der Menge X auf die Menge Y eindeutig, d.h. entspricht jedem Element $x \in X$ genau Element $y \in Y$, so heißt die Abbildung eine *Funktion*."

[27]: „**függvény;** leképezés, operátor, transzformáció..."

FÜGGVÉNY = VALAMI

Külön kell megemlíteni azokat a forrásokat (köztük sajnos tankönyveket is), amelyek nem mondják ki, hogy mi a függvény, csupán azt, hogy **mikor kapunk függvényt,** vagy **mikor beszélünk függvényről,** illetve azt definiálják, hogy **hogyan adunk meg függvényt.**

[18]: „A hozzárendelés a két halmaz elemei között függvénykapcsolatot létesít." „Ha egy halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük valamely halmaznak pontosan egy elemét, függvényt kapunk."

[29]: „Mikor mondjuk, hogy egy mennyiség a másik mennyiség függvénye? Mikor van két mennyiség között függvénykapcsolat?" ... „Egy függvényt meghatároztunk, ha ismerjük az értelmezési tartományt és a hozzárendelést, amely alapján a független változó értékeihez a függvényértékek meghatározhatók."

[22]: „Adott X halmazon értelmezett és adott Y halmazbeli értékeket felvevő függvényt alapfogalomnak tekintjük." „Legyen X és Y (nem üres) halmaz. Az X-en értelmezett és Y-beli értékeket felvevő függvényt úgy adunk meg, hogy X minden eleméhez (valamilyen 'előírás', 'utasítás', 'képlet', 'szabály' stb. segítségével) hozzárendeljük Y valamely elemét."

[12]: *„Wir sprechen von einer Funktion $y = f(x)$, wenn ernsted der Definitionbereich, das heißt die Menge der zulässigen Argumentwerte x gegeben ist und zweitens jedem zulässigen Wert x genau ein Wert y zugeordnet ist."*

[13]: „Függvényről általában akkor beszélünk, ha egy bizonyos mennyiség minden értékének megfelel egy másik."

[25]: „Leképezésről (applikációról, függvényről) beszélünk akkor, ha egy halmaz minden eleméhez hozzárendeljük egy másik halmaz egy-egy elemét."

[32]: „A függvényfogalom lényege: az x értékeinek összepárosítása y megfelelő értékeivel. ... Minden függvény-értelmezéskor meg kell mondanunk, hogy x milyen számok halmazából választható, és meg kell adni egy utasítást, amely megmondja, hogy ha választottunk innen egy x értéket, annak miféle y lesz a párja."

FÜGGVÉNY = HALMAZ = (SPECIÁLIS) RELÁCIÓ

Utolsónak hagytam azokat a leginkább elfogadható definíciókat, melyek megközelítik az általam javasolni szándékozott értelmezést, de – mint a következő szakaszban megmutatom – ellentmondásokat még ezek is tartalmaznak.[2]

[43]: „A jobbról egyértelmű kétváltozós relációt *funkcionáls relációnak* vagy *függvénynek* vagy *leképezésnek* nevezzük."

[10]: „A függvény (leképezés) egyfajta reláció. A függvények gépekhez hasonlóan viselkednek."

[8]: „Függvénynek (leképezésnek) nevezzük az olyan relációt, amelyre $(x, y) \in f$ és $(x, y') \in f$ esetén $y = y'$ teljesül."

[16]: „Eine Abbildung oder Funktion f aus einer Menge X in eine Menge Y ist eine nacheindeutige Relation auf $X \cup Y$ ..." „Eine Relation R in einer Menge X ist eine Menge von geordneten Paaren von Elementen von X, d.h. es ist $R \subseteq X^2$."

[40]: „Balról totális, jobbról egyértelmű $f \subseteq X \times Y$ relációt leképezésnek (függvénynek) nevezzük." „Minden $R \subseteq X \times Y$ részhalmazt bináris relációnak nevezünk."

[23]: „Az $f \subset X \times Y$ relációt függvénynek nevezzük, ha tetszőleges $x \in D_f$ *elemhez egyetlen olyan* $y \in Y$ elem létezik, amelyre $(x, y) \in f$" – „A függvény helyett, vele azonos értelemben gyakran használjuk a *leképezés, operátor, transzformáció* szavakat."

[28]: „Jelöljön $f = (X, Y, S)$ egy bináris relációt az X és Y halmazok elemei között. Az f relációt az X halmazon értelmezett **függvénynek** vagy **leképezésnek** nevezzük, ha bármely $x \in X$ elem esetén az $f[x]$ metszet az Y halmaz egyelemű részhalmaza." – „Legyen X és Y két

[2] Ahol arra szükség van, idézem a forrásnak a relációra adott definícióját is.

halmaz és S az $X \times Y$-nak egy részhalmaza. Azt mondjuk, hogy S az X és Y elemei között egy R_S **relációt** értelmez a következőképpen: ha $x \in X$ és $y \in Y$, akkor x az R_S relációban van y-nal akkor és csak akkor, ha $(x, y) \in S$."

Mi legyen a függvény?

Az idézetek sokfélesége azt hiszem megdöbbentő. Megdöbbentő azért is, mert a matematika művelői általában büszkék – és jogosan azok – precizitásukra, különösen amióta *Euklidész az* „Elemek"-ben a geometriát felépítette, és ahogyan azt tette. Amit alapfogalomnak ítélt, az valóban egyszerű, elemi, primitív. Amit viszont nem lehet annak venni, vagy az alapfogalmak segítségével értelmezni lehet, azt definiálta. Igaz, hogy ezek némelyikét az ismeretek bővülésével módosítani, másokat kiegészíteni kellett. Ez azonban magától értetődik, a fejlődés minden rendszert, minden új elméletet időnként revízióra kényszerít. De amit itt látunk, az nem kielégítő. Arról már nem is beszélve, hogy némelyik definíció visszalépést jelent a vele egyidejű, sőt korábban napvilágot látott és a fejlődésben előbbre tartó szemlélethez képest. Vegyük most sorra az elavult és a megtartandó attribútumokat, hogy eljuthassunk egy teljes, *Euklidész* előtt is megálló értelmezéshez.

A függvény azonosítása a képlettel kizárja az általánosításból a nem-számhalmazokon értelmezett függvényeket. Ezzel a szakma már elég régen szakított. Ugyancsak világossá vált, hogy az ún. *többértékű* megfeleltetés külön absztrakciót igényel. A kezdetben alkalmazott szétválasztást követte a reláció fogalmának bevezetése, és – mint láttuk az utolsó idézetekből – ez lett az a *nemzetség fogalom*[3], melyben a függvényt speciális *fajként* lehet definiálni. Mielőtt ezekből kiindulva tovább lépnénk, nézzük meg, mi a kifogás azok ellen az értelmezések ellen, amelyek a függvényt *a függő változóval* vagy a *hozzárendeléssel* (megfeleltetéssel, leképezéssel) azonosítják. Nos, ugyanúgy elfogadhatatlan, mintha például a törtszámot azonosítanánk a számlálójával (vagy a nevezőjével), illetve az osztási művelettel. A törtszám egyik sem a három komponense (összetevője) közül, hanem ezek **kompozíciója.** (Hasonló példák sorolhatók: a háromszög nem azonos az oldalaival, sem szögeivel, ezek az alkotórészei, komponensei; a kocka lapjai, élei, csúcsai alkotórészek; egyik sem maga „a" kocka... stb.) Azt hiszem, ennek az analógonját láthatjuk a függvénynél is: a függvényt két halmazzal és egy hozzárendeléssel adjuk meg, – mondja ki sok fentebbi idézet –, tehát a függvény nem egyszerű (elemi, elsődleges, primitív, atomi stb.), hanem összetett fogalom. Három elemi (vagy legalábbis egyszerűbb) fogalom **kompozíciója.**

Ehhez a szemlélethez jár legközelebb *Maurer I. Gyula* és *Virág Imre,* amikor [28]-ban így fogalmaznak: „...az X és Y halmazok közötti R_S reláción az **(X, Y, S) halmazrendszert** értjük." (Kiemelés tőlem, *H.F.*) A szerzők erre a fogalomra támaszkodva definiálják a függvényt, mint olyan relációt, amelynél minden elem képhalmaza egyelemű. A hivatkozott monográfiában alkalmazott felépítésben azonban ellentmondás van. Ez a fentebbi idézetekből még nem derül ki, ám itt megadom a még hiányzó részleteket.

Az első két mondat így hangzik: „Az $X \times Y$ minden S részhalmaza meghatároz egy relációt az X és Y halmazok között." – és – „Ekkor az X halmazt a függvény **értelmezési tartományának** *nevezzük:* $X = \mathrm{dom} f$." Legyen például $X = Y = \mathbf{N}$ és $S = \{(1, 1)\} \subset \mathbf{N^2}$. Ez az $R_S = (\mathbf{N}, \mathbf{N}, S)$ reláció tehát függvény, mert minden $x \in X$ elem képhalmaza egyetlen elemet tartalmaz. Ugyanakkor értelmezési tartománya nem az X halmaz, hanem $\mathrm{dom} R_S = \{1\} \subset X$.

Nem szerencsés az a mondat sem, hogy „A függvény értelmezéséből adódik, hogy ha az $f = (X, Y, S)$ reláció függvény, akkor $S = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, azaz S mindazon $(x, y) \in X \times Y$ elempárok összessége, ahol x végigszalad X elemein és $y = f(x)$." – hiszen ez a tulajdonság nem következik semmi előzményből.

[3] A biológiai rendszertanban alkalmazott *nemzetség* a *fajnál* egyel magasabb rendszertani egység.

Az értelmezési tartományra vonatkozó ellentmondás egy jó feloldását szolgálja a Springer Hungarica [40] fent idézett definíciója, mely a „balról totális" jelzőt a relációk tulajdonságai között pontosan meghatározza: *„balról totális* $R \Leftrightarrow \forall x\, \exists y$: (xRy)".

Amint láttuk, sok más értelmezés hangsúlyozza a függvény megadásánál azt, hogy az X halmazt, mint értelmezési tartományt kell megadni. Az értékkészlet megadásánál ennél „engedékenyebbek" vagyunk. Ott megengedjük, hogy „...a másik halmaz a **függvény értékkészlete, vagy annál bővebb halmaz...**" legyen. [15]

Az én véleményem, hogy ettől a koncepciótól el kell tekintenünk. Egyrészt a két halmaz „egyenjogosítása" érdekében, ám ez csak egy formális, nem túl lényeges szempont. Az igazi okot a **közvetett függvény** értelmezése körül kell keresnünk. A definíciók minden analízis könyvben megtalálhatók ([22], [8]). „Legyen $g: A \to B$ és $f: C \to D$ függvények, melyekre $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ $(D_f = C)$. Ekkor az $f \circ g$: $g^{-1}(R_g \cap D_f) \to D$, $x \mapsto f(g(x))$ függvényt az f és g függvények összetett függvényének nevezzük." Látható, hogy be kell vezetni hozzá az őskép fogalmát, és a kötelező értelmezési tartományt adott esetben meg kell konstruálni. Mindez elkerülhető, ha megengedjük az értelmezési tartományt magában foglaló, bővebb halmaz megadását. Az értelmezési tartományhoz való ragaszkodás valószínűleg az első értelmezésekre vezethető vissza: *„x minden szóbajövő, x minden megengedett"* értékéhez tartozik függvényérték. Ahogy e kezdeti meghatározások sok hiányosságára rájöttünk és elvetettük, ugyanúgy ezt a kritériumot is célszerű lenne átértékelni. Itt például helyesebb lenne úgy fogalmazni, hogy $f \circ g$ a függvényeket meghatározó **leképezések** szorzata, mely leképezések – mint fentebb kifejtettem – nem azonosak a függvénnyel, annak csak összetevői. A valós függvénytanban így is a legtöbb tankönyvben, kézikönyvben – [48], [13], [12], [34], [19], [20] stb. – alkalmazzák azt a kompromisszumot, miszerint „Előfordulhat, hogy egy-egy függvényt az előzőektől eltérő módon, rövidebben adunk meg.... *Ilyenkor a függvény* ***értelmezési tartományának*** *a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát tekintjük, amelyet a függvény hozzárendelési szabálya megenged."* [15]

Hogy ez lehetséges, arra az ELTE egyik kari jegyzetének [23] szerzői mutatnak példát, amikor a relációt és annak (nem csak a függvénynek!) értelmezési tartományát így definiálják: „Azon $x \in X$ elemek összességét, amelyekhez létezik olyan $y \in Y$, hogy $(x, y) \in S$, az S reláció értelmezési tartományának nevezzük." Jelben:

$$D_S = \left\{ x \in X \,\middle|\, \exists_{y \in Y} (x, y) \in S \right\}.$$

A konklúzió, a javaslat

A figyelmes Olvasó már bizonyára kitalálta a javaslatomat, melynek minden részlete az idézetekből kiolvasható, csak össze kell gyűjteni őket. (Valahogy olyan ez, mint Michelangelo márványszobrai, melyek a kőtömb belsejében már megvannak, csak a felesleget kell lefaragni róluk.) Két lehetőség adódik:

A relációra vezetjük vissza a függvényt (= egyértékű reláció)

Ehhez definiálni, értelmezni kell a következő fogalmakat:

Reláció: Legyen **X** és **Y** két halmaz, és **S** az $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$-nak egy részhalmaza. Az **S** az **X** és **Y** elemei között egy $\sigma =$ **<X, Y, S>** relációt értelmez. Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbf{X}$ és $y \in \mathbf{Y}$ elemek σ relációban vannak, ha az $(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ rendezett pár **S**-nek is eleme.

Képelem: Ha $(x, y) \in \mathbf{S}$, akkor y-t az x ***egyik*** képelemének nevezzük.

Képhalmaz: Az $x \in \mathbf{X}$ elem képhalmaza: $\sigma[x] = \{y \mid y \in Y \wedge x \in X \wedge (x, y) \in S\}$. Egy $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{X}$ részhalmaz képe (képhalmaza): $\sigma[H] = \{y \mid y \in Y \wedge x \in H \wedge y \in \sigma[x]\}$.

Értelmezési tartomány: $D_\sigma = \{x \mid x \in X \wedge \exists y: (y \in Y \wedge y \in \sigma[x])\} = \{x \mid x \in X \wedge \sigma[x] \neq \emptyset\}$.

Értékkészlet: Az értékkészlet az értelmezési tartomány képe: $R_\sigma = \sigma[D_\sigma]$.

Függvény: Az a reláció, melyben az értelmezési tartomány minden elemének képhalmaza egyelemű halmaz.

Megjegyzés: A hasonló értelmezéssel nem tévesztendő össze, hiszen azok a relációt a Descartes-szorzat részhalmazával azonosítják, tehát a függvényt és a relációt is halmaznak tekintik.

A hozzárendelést tekintjük alapfogalomnak (kikerüljük a Descartes-szorzatot):

Függvény: Adott **X** és **Y** halmazok és egy f leképezés (egyértelmű megfeleltetés, hozzárendelés stb.) meghatározza az $F = <\mathbf{X}, \mathbf{Y}, f>$ függvényt.

Képelem: Az $x \in \mathbf{X}$ elem képének nevezzük a hozzárendelt $y \in \mathbf{Y}$ elemet, és így jelöljük: $y = f(x)$.

Képhalmaz: Egy $\mathbf{H} \in \mathbf{X}$ részhalmaz képe: $f[H] = \{y \mid y \in Y \wedge x \in H \wedge y = f(x)\}$.

Értelmezési tartomány: $D_F = \{x \mid x \in X \wedge \exists y: (y \in Y \wedge y = f(x))\} \subseteq X$.

Értékkészlet: Az értelmezési tartomány képe: $R_F = f[D_F] \subseteq Y$.

Epilógus

Nem érintettem, de nagyon fontos a fogalom tanításának metodikája. Azt a nézetet, hogy a diákok éretlenek egy ilyen fogalom befogadására, *visszautasítom*. Lehet, hogy kezdésnek elvont (nem jobban, mint a jelenlegi!), de érettségi összefoglalásban, sőt hamarabb is, kellő mennyiségű konkrétum absztrakciójaként megtanítható. A jelenlegi iskolai gyakorlat abban is bírálható, hogy a halmazok tárgyalása után a függvény általános fogalmával foglalkozunk ugyan, de egy-két tanórával (a tankönyvben 3-4 oldallal) később már csak valós függvényekkel. Akkor meg minek az egész felhajtás? Foglalkozzunk kezdetben a lineáris függvénnyel, majd a másodfokúval, „ábrázolgassuk" ezek transzformáltjait, és ismerkedjünk meg a négyzetgyök, a logaritmus („inverz") függvényekkel stb. De akkor valljuk be, hogy az alsó és középfokú iskolákban **„A valós függvénytant"** tanítjuk és nem az általános függvényszemléletet. Ez önmagában nem szégyen. Vagyunk még egy páran, akik csak *Szász „Pali bácsitól", Riesz Frigyestől, Fejér Lipóttól* tanultuk meg, hogy mi a függvény *(Dirichlet* szerint), aztán ezzel egészen jól megvoltunk az oklevél megszerzéséig (meg még utána egy darabig).

A magam részéről időt szakítanék a relációkra, de nem csupán a „felesége", „háza", „anyja" magyarázó példákra. A számokra értelmezett relációkkal is **találkozik** a diák, csak nem használunk ki minden ebben rejlő lehetőséget. Például az „osztója", „prímosztója", „többszöröse" stb. relációk ábrázolhatók koordináta-rendszerben. A „legnagyobb osztója", „legkisebb osztója", „legnagyobb prímosztója" relációk, függvények. A „legnagyobb valódi osztója" olyan hozzárendelésre ad példát, amelynél nem az értelmezési tartományt adjuk meg.

Ugyancsak el kell gondolkodni azon, hogy ha a fogalomrendszerbe az új elemet – ti. a három komponenssel adott függvényt – beépítjük (e nélkül nem megy!), akkor mit-mivel jelöljünk. Én a definícióban a **leképezésre** meghagytam a hagyományos f (kisbetűs) jelet és a képre az $f(x)$ szimbólumot, ugyanakkor a függvény **nevesítésére** a megfelelő F nagybetűt alkalmaztam. Ez a klasszikus jelöléstechnikát megőrzi, csupán a primitív függvényre megszokott jelölést zavarja. A „nevesített" elemi függvények jelölése ilyen lehet:

$\mathrm{SIN} = <\mathbf{R}, \mathbf{R}, \sin>$,
$\mathrm{LG} = <\mathbf{R}, \mathbf{R}, \lg>$,
$\mathrm{EXP} = <\mathbf{R}, \mathbf{R}, x \mapsto e^x>$,
$\mathrm{RAD2} = <\mathbf{R}, \mathbf{R}, x \mapsto \sqrt{x}>$,
$\mathrm{POTn} = <\mathbf{R}, \mathbf{R}, x \mapsto x^n>$ stb.

Irodalom

[1] Bacskay Zoltán – Krekó Béla: Matematikai alapismeretek – Közgazdasági és Jogi, 1963.

[2] Baranov – Bogatyrev – Bokovnev: Matematika... – MIR (Moszkva), 1985.

[3] Barcsay Pál dr.: Műszaki matematikai gyakorlatok – Tatakönyvkiadó, 1964.

[4] Bartsch, Hans-Jochen: Matematische formeln – VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1967.

[5] Borossay Dávid: Algebra a középiskolák számára – Szt. István Társulat, 1919.

[6] Bronstejn – Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv – Műszaki, 1963.

[7] Courant, C. – Robbins, H.: Mi a matematika – Gondolat, 1966.

[8] Császár Ákos: Valós analízis – Tankönyvkiadó, 1983.

[9] Czapáry Endre: Matematika a szakközépisk. I. oszt. számára – Tankönyvkiadó, 1981.

[10] Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát – Gondolat,1973.

[11] Frege, Gottlob: Logika, szemantika, matematika – Gondolat, 1980.

[12] Gelfand – Glagoljeva – Schnol: Funktionen und... – BSB B.G. Verlagsgesellschaft, 1971

[13] Gelfand – Glagoljeva – Kirilov – Schnol: A koordinátamódszer – Műszaki, 1973.

[14] Horvay – Pálmai: Matematika, Gimnázium I. – Tankönykiadó, 1972.

[15] Hajnal Imre: Matematika, Gimnázium I. – Nemzeti Tankönykiadó, 1987.

[16] Kleine Enzyklopädie: Mathematik – VEB Bibliogr. Inst. (Leipzig), 1983.

[17] Knopp dr., Konrad: A függvénytan elemei – Tankönyvkiadó,1958.

[18] Koller Lászlóné dr.: Matematika I. – Calibra, 1993.

[19] Korányi E. dr.: Matematika, I. osztály – Tankönyvkiadó, 1982.

[20] Korányi E. dr.: Matematika, (fakt. A) IV. osztály – Tankönyvkiadó, 1982.

[21] Korányi E.: Matematika,(tanári kézik., I.-II.) – Tankönyvkiadó, 1981.

[22] Kósa András: Ismerkedés a matematikai analízissel – Műszaki, 1981.

[23] Leindler L. – Schipp F.: Analízis I. (ELTE jegyzet) – Tankönyvkiadó, 1991.

[24] Lukács Ernőné – Rábai Imre: Feladatok és megoldások – Gondolat, 1971.

[25] Mansfield-Bruckheimer: Matematika új felfogásban – Gondolat,1973.

[26] Matematikai kisenciklopédia – Gondolat, 1968.

[27] Matematikai kislexikon – Dacia (Kolozsvár), 1983.

[28] Maurer I. Gyula – Virág Imre: A relációelmélet elemei – Dacia (Kolozsvár), 1972.

[29] Molnár József. Az algebra és az elemi függvények tanítása – Tankönyvkiadó, 1965.

[30] Obádovivics J. Gyula: Matematika – Műszaki, 1957.

[31] Papy: Ismerkedés a topológiával – Műszaki, 1973.

[32] Péter Rózsa: Játék a végtelennel – Bibliotheca, 1957.

[33] Pintér Lajos dr.: Analízis I. (gimn. spec.) – Tankönyvkiadó, 1987.

[34] Reiman István: Matematika – Műszaki, 1992.

[35] Révai Nagy lexikona – Révai, 1913.

[36] Ribnyikov, K. A.: A matematika története – Tankönyvkiadó, 1968

[37] Sain Márton: Matematikatörténeti ABC – Tankönyvkiadó, 1974

[38] Sain Márton: Matematikatörténeti ABC – Nemzeti Tankönyvkiadó – Typotex, 1993.

[39] Schmid, Otto: Matematika hiradástechnikusoknak – Műszaki, 1940.

[40] SH atlasz – Matematika – Springer, 1993.

[41] Skemp, Richard R.: A matematikatanulás pszichológiája – Gondolat, 1975.

[42] Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei – Közoktatásügyi, 1951.

[43] Sztoljár, A. A.: A matematikatanítás módszerei – Tankönyvkiadó, 1969.

[44] Természettudományi kislexikon – Akadémiai, 1971.

[45] Új magyar lexikon – Akadémiai, 1960.

[46] Varecza László: Konkrét és absztrakt struktúrák – Tankönyvkiadó, 1970.

[47] Varga Tamás: Érettségi matematikai összefoglaló – Tankönyvkiadó, 1959.

[48] Vygodsky, M.: Mathematical handbook I. – MIR (Moszkva), 1975.

Dr. Kiss Sándor – Róka Sándor

Gondolatok az I. Matematikai Versenyvizsgáról

Magyarországon igen sokféle matematikaversenyt szerveznek a vállalkozó, jó felkészültségű tanárok és az őket támogató különféle társadalmi szervezetek, alapítványok. Ezek között a szakmailag értékesebb versenyek **zárthelyiszerűek**, vagyis a tanulók adott idő alatt, egyszerre, azonos helyen, felügyelet mellett írják meg dolgozatukat. A zárthelyiszerű versenyek tovább tipizálhatók: egy részük tesztverseny, más részük problémamegoldó verseny. A versenyek másik csoportjába a **levelező** versenyek tartoznak, amelyek az egész évi önképzés, a matematikai kutatás, az önálló búvárkodás szempontjából fontosak, de az itt elért helyezések – az esetlegesen igénybevett külső segítség miatt – erősen megkérdőjelezhetők.

A zárthelyi versenyek közös jellemzője az állandó válogatás, vagyis a verseny következő fordulójába csak az a résztvevő juthat be, aki a megelőző próbán kiválóan szerepelt. Lelkileg megrázó élmény a tanulónak, amikor megtudja az eredményt, hogy ő bizony nincs a továbbjutottak között, csak a „futottak még" kategóriát gyarapítja a benevezése. Ha „rossz napot" fog ki a tanuló, akkor nincs javítási lehetősége. A másik problémánk is részben ezzel függ össze. A versenybizottságoknak úgy kell összeállítaniuk a versenyanyagot, hogy az alkalmas legyen a gyerekek egy szűk rétegének kiválasztására, vagyis kellően nehezek legyenek a feladatok. A túl nehéz feladatanyag szintén gyakran okoz elkeseredést a tanulók körében.

Némelyik verseny igen drága, elsősorban a versenykiíró profitorientáltsága dominál, cserébe a tanuló kap néhány – számára megoldhatatlan – feladatot.

Ezen tapasztalatokból kiindulva arra a következtetésre jutottunk, hogy szükség lenne Magyarországon egy olyan viszonylag olcsó zárthelyiszerű versenyre, amelyen a fentiekben vázolt „lelki traumákat" csökkenteni lehet, de mégis alkalmas egy országos szintű értékelésre. A versenyvizsgával elsősorban az a célunk, hogy ne legyen kiesés, ha valamelyik fordulóban „rossz napja" van a tanulónak, akkor egy másik fordulóban tudjon javítani. A tanuló szerezzen tapasztalatot arra vonatkozóan, hogy az ő tudása egy országos megmérettetésben menynyit ér valójában. Ennek reális ismerete segítheti a szülőt, a tanulót a pályaorientációban, annak megválaszolásában, hogy milyen jellegű középiskolai osztályban, illetve milyen felsőoktatási intézményben vannak reális esélyei a továbbtanulás terén.

A fentiekben vázolt versenyformát az általunk szervezett Matematikai Versenyvizsga testesíti meg. A háttérben a Versenyvizsga Alapítvány húzódik meg, ott lehet érdeklődni a nevezés módjáról. Az iskolák a tanulók nevezéseit november végéig küldhetik el a versenyt támogató és szervező *Tóth Könyvkereskedés* címére: Versenyvizsga Alapítvány 4034 Debre cen, Huszár Gál u. 31-33. Telefon: (52) 450-861, (52) 450-862.

A versenyvizsga célja

Reális nehézségű, tantervhez is igazodó feladatokkal országosan egységes zárthelyi szintfelmérés azon V-VIII. osztályos tanulók részére, akik szeretik a matematikát, pályaválasztásukban feltehetően szerepe lesz e tárgynak, s kíváncsiak arra, hogy országos szinten milyen teljesítményre képesek. A tanulóknak nyújtott szakirodalom segítségével önállóan is legyenek képesek a különféle matematikai versenyeken való eredményes szereplésre, önképzésre.

A verseny szakmai szervezői

Róka Sándor (e-mail: rokas@agy.bgytf.hu) és dr. Kiss Sándor (e-mail: kisssa@agy.bgytf.hu). Mindkettő a Bessenyei György Tanárképző Főiskola docense, matematikai tehetséggondozással kapcsolatos munkásságuk szakmai körökben országosan elismert.

A verseny szervezése

A tanulók évfolyamonként versenyeznek az osztály és az iskola jellegétől fiiggetlenül. A dolgozatokat egy helyen, teljesen azonos elvek alapján javítjuk. Minden dolgozatot legalább két tanár javítja. Törekszünk a javítás egységességére és objektivitására.

A versenyanyagot, a feldolgozásra ajánlott témaköröket, a javasolt szakirodalmat a tanulók részére év elején kijelöljük, ezzel irányítjuk a felkészülésüket, illetve a tanárok felkészítő tevékenységét. A témakörök megadása remélhetően az iskolák szakköri életére is ösztönzőleg fog hatni, hiszen egész éves szakköri tematikát ad. A versenyvizsgára tudatosan készülők körében számítunk a transzferhatásra, vagyis az itt szerzett ismeretek, jártasságok, tapasztalatok hatására más versenyeken is eredményesen fognak szerepelni.

Évente két vizsgát tartunk: január, illetve május közepén. Mindenki a saját iskolájában írja meg a versenydolgozatát, ezzel csökkentjük a tanulók kiadásait, hiszen nem kell utazásra költeni. Az I. versenyen néhány iskolában volt visszaélés a saját iskolában történő dolgozat írásnál, egyértelműen megállapíthatók voltak a nem önállóan írt dolgozatok. A jövőben az ilyen tanulók pontszámát megsemmisítjük, de a versenyt folytathatják a következő fordulóval. A versenyidő 90 perc. Egy-egy fordulóban 5-6 szép, érdekes matematikai problémát tűzünk ki. Ez évi feladatanyagunkból rövid ízelítőt adunk a cikk végén. A verseny eredményét a két fordulóban nyújtott összteljesítmény alapján állapítjuk meg. Elkészítjük az országos rangsort, amelyet minden benevezett iskola megkap. A rangsorolás újszerű formája miatt feltehetően sok tanuló fog sikerélményhez jutni. Az eredményesen szereplő tanulók közül a lejobb 20% aranyoklevelet, a következő 20% ezüst-, újabb 20% bronzoklevelet kap. Az évfolyamonkénti első 10 további tárgyjutalmat kap. Ebben az évben a nevezettek több mint fele kapott valamilyen színű oklevelet. Ezentúl minden résztvevő emléklapot, valamint a Tóth Könyvkereskedéstől egy-egy ajándék matematikakönyvet kap.

Az I. Versenyvizsgán közel 800 tanuló indult, az ország minden megyéje képviseltette magát néhány iskolával. Kezdetnek ezzel teljes mértékben elégedettek voltunk. Biztosak vagyunk abban, hogy versenyünk szélesebb körben történő népszerűsítésével, eszméivel, célki tűzésével való megismerkedés után, néhány éven belül az ország egyik legnépszerűbb versenye leszünk, amelynek további lehetőségei is vannak. Ezek közül néhány:

- más tantárgyakból is lehetne hasonló vizsgaformát szervezni,
- az eredményeket (főleg az aranyoklevelet) a középiskolai felvételinél figyelembe lehet venni,
- mozgalmunkat a középiskolára, illetve a határokon túli magyar településekre is ki lehet
- terjeszteni, a versenyhez kapcsolódóan nyári tehetséggondozó tábort lehet szervezni, stb.

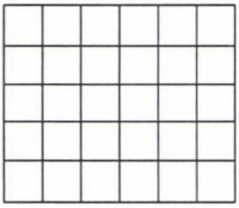
Válogatás az 1998/99. évi versenyfeladatokból

5. osztály

1. Egy korongot megcímkéztünk az „1", két korongot a „2", három korongot a „3", ..., 50 korongot az „50" jelzéssel. Az így megjelölt $1 + 2 + 3 + ... + 50 = 1275$ korongot egy dobozba tesszük, majd onnan becsukott szemmel kiveszünk néhányat. Mennyit vegyünk ki, hogy biztosan legyen a kivett korongok között legalább 10 azonos címkéjű?

2. *a)* Beírhatók-e egy 5×6-os táblázatba 1-től 30-ig a számok úgy, hogy minden oszlopban azonos legyen a számok összege?

b) Beírhatók-e úgy a számok, hogy minden sorban azonos legyen a számok összege?



3. Egy négyjegyű páros szám számjegyeinek szorzata 20, számjegyeinek összege pedig 11. Melyek ezek a számok?

4. Hány olyan egyenlőszárú háromszög van, melynek leghosszabb oldala 1999 egység, s az oldalhosszak egész számok?

5. A betűkkel felírt összeadásban azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. Milyen számot jelölhet $\overline{ABCD}$?

$$\begin{array}{r} DCB \\ +\,CDB \\ \hline \overline{AABB} \end{array}$$

6. osztály

6. András 30 évvel idősebb Bélánál, 25 évvel ezelőtt háromszor annyi idős volt, mint Béla. Hány évesek most?

7. Keresd meg mindazon négyjegyű 9-re végződő számokat, amelyek oszthatók számjegyeik mindegyikével!

8. Egy téglatest mindegyik élének hossza 1-nél nagyobb egész számú cm. Térfogata 525 cm^3. Mekkora lehet a felszíne?

9. Négy játékos megegyezett, a vesztes minden játszma után megkétszerezi a többi pénzét. Összesen négy játszmát játszottak, mindegyik játékos egyszer veszített. A négy játszma befejezése után mindegyik játékosnak 128 Ft ja volt. Mennyi pénze volt ajátékosoknak külön-külön a játék megkezdése előtt?

10. Négy különböző számjegyből összerakjuk a lehetséges legnagyobb és legkisebb négyjegyű számot. A két szám összege 10560. Mi ez a négy számjegy?
Négy különböző számjegyből összerakjuk a lehetséges legnagyobb és legkisebb négyjegyű számot. A két szám összege 10477. Mi ez a négy számjegy?

7. osztály

11. Az 50-nél kisebb természetes számok közül 7 egymást követő számot összeszoroztunk és egy olyan szorzatot kaptunk, amelyik pontosan két nullára végződik. Hányféle ilyen szorzat létezik?

12. Egy téglalap oldalai 5 és 9 egység, amelyet felbontottunk 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra. Mutasd meg, hogy ezek között van két egyenlő területű téglalap!

13. Határozd meg azokat az a, b, c prímszámokat, amelyek kielégítik az alábbi egyenlőséget: $2a + 3b + 8c + 8c^2 = 2458$!

14. *a)* Van-e olyan x szám, amelyre teljesül az $x < x^3 < x^4 < x^2$ egyenlőtlenségsorozat? Vizsgáld meg ugyanezt a kérdést a következő esetekben is:
b) $x^3 < x < x^2 < x^4$
c) $x < x^2 < x^3 < x^4$
d) $x^4 < x^3 < x^2 < x$

15. Rendezzük nagyság szerint sorba azokat a számokat, amelyek az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer tartalmazzák! Melyik szám áll az 1999. helyen?

8. osztály

16. Leírtam egy papírra öt számot, majd páronként összeadtam őket, s a következő számokat kaptam: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Határozd meg a felírt öt számot?

17. Figyeljétek meg a következő számsorozat képzési szabályát:

9, 98, 987, 9876, .., 9876543210,
98765432109, 987654321098,
9876543210987, ...

Hány prímszám van ebben a sorozatban?

18. Egy 6 cm élű kocka minden csúcsát levágjuk egy-egy olyan síkkal, amely a csúcsból kiinduló éleket a csúcstól 2 cm távolságra metszi. Hány lapja, éle és csúcsa van az így kapott testnek?

19. Az ABC háromszögben a CH magasság és a BM szögfelező 70°-os szöget zárnak be. A B csúcsnál lévő szög szögfelezője a szemben fekvő oldallal 130°-os szöget alkot. Számítsátok ki az ABC háromszög szögeit! Igazoljátok, hogy $AC = 2 \cdot CH$!

20. Szét lehet-e osztani az 1, 2, 3, ..., 1998 számokat két csoportra úgy, hogy az egyik csoportban kétszer akkora legyen a számok összege, mint a másikban? Szét lehet-e osztani a fenti számokat három csoportra úgy, hogy a második csoportban kétszer, a harmadik csoportban háromszor akkora legyen a számok összege, mint az első csoportban?

Irodalom

[1] Egy matematikai tehetséggondozó szakkör munkájából, (A szakköri nevelőmunka kézi könyve, Budapest, 1987. 262-279. oldal

[2] Imrecze – Reiman – Urbán: Fejtörő feladatok felsősöknek, (Harmadik, átdolgozott kiadás) Szalay Könyvkiadó 1999.

[3] Kiss Sándor: Az indirekt bizonyítás tanítása, A Matematika Tanítása 1986. 6. szám 163-169. oldal

[4] Kosztolányi – Mike – Vincze: Érdekes matematikai feladatok, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged 1991.

[5] Róka Sándor: Szakköri feladatok matematikából, 5-6. osztály Tóth Könyvkereskedés 1996.

[6] Róka Sándor: Szakköri feladatok matematikából, 7-8. osztály Tóth Könyvkereskedés 1996.

[7] Róka Sándor: Egypercesek, feladatok matematikából 10-14 éveseknek, Tóth Könyvkereskedés 1997.

[8] Sztrókay – Török: Érdekességek és feladatok egy évszámról, 1998 Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged 1997.

[9] Az Abacus és a Középiskolai Matematikai Lapok feladatai, cikkei. (A KöMaL-t elsősorban tanári irányítással tudja egy általános iskolás tanulmányozni.)

HELYREIGAZÍTÁS

A Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. ezúton tesz eleget Pogáts Ferenc társszerző kérésének, és közli, hogy a 13141/Fr/Fgy raktári számú francia és a 13141/N/Fgy raktári számú német matematikai feladatgyűjtemények eredeti szerzői a következők:

Gimes Györgyné (szerkesztő)
Gádor Endréné
Gyapjas Ferencné
Hárspataki Dékány Veronika
Korányi Erzsébet
Pálmai Lórántné
Pogáts Ferenc
Reiman István
Scharnitzky Viktor

Kérjük a szerzők és a szerkesztő utólagos elnézését és megértését.

Holló-Szabó Ferenc

Egy különleges sorozatról

Egy egyszerűen megadható és meglepően sok érdekes tulajdonsággal rendelkező sorozatra szeretném felhívni a tisztelt olvasók figyelmét. Az alábbiak képezhetik szakköri foglalkozások, ill. elemi matematikaszemináriumok anyagát. Annak ellenére, hogy a természetes számokból álló sorozatok irodalma igen bőséges, mind ez ideig nem találtam az alábbi sorozat tulajdonságaival foglalkozó publikációt. A budapesti tanárképző főiskola speciálkollégiumain már több éve folytatunk a szóban forgó sorozattal kapcsolatos kutatásokat.

Munka közben rengeteg olyan észrevétel született, ami egymástól látszólag távol eső dolgok kapcsolatára utal. Mint kiderült, ezzel a sorozattal a sejtautomata-elmélettől kezdve bizonyos approximációs problémákig sok-sok helyen találkozhatunk.

Egy későbbi alkalommal talán majd az egyes alkalmazásokról is ejthetünk néhány szót, de a jelenlegi keretek között csak az alapvető észrevételekből adhatunk ízelítőt. Megállapításaink, sejtéseink kiegészítése, az esetleges bizonyítások pótlása a mellékelt irodalom alapján – addig is az olvasóra vár.

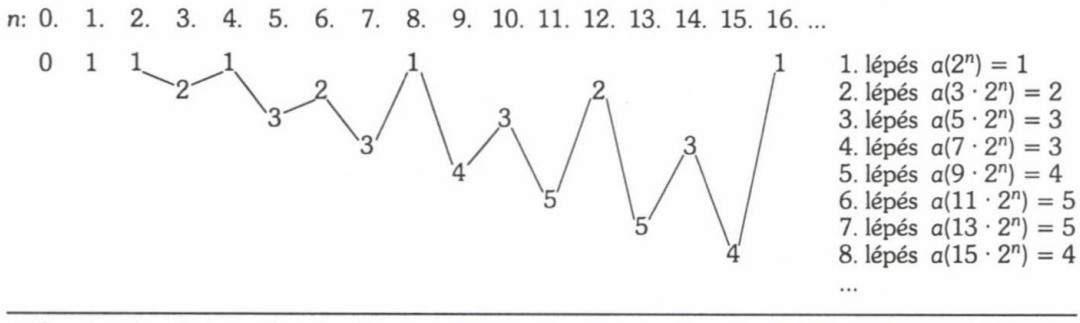
Az alábbiakban – a vizsgált különleges sorozat, azaz – a közéírásos-sorozat bevezetése után néhány elemi matematikai kísérletet ismertetünk, majd elemezzük a kapott eredményeket. A cikket néhány nyitva hagyott kérdéssel zárjuk.

1. definíció: Közéírásos sorozat

A továbbiakban a sorozat elemeit rekurzív módon definiáljuk. Induljunk ki a 0, 1 kezdő elemekből, majd minden esetben, amikor a sorozat egy eleme pl. a k. már ismert, akkor legyen a kétszer annyiadik elem értéke ezzel egyenlő. Az egyes lépésekben megkeressük a legkisebb indexű, még nem definiált elemet – értelemszerűen ez egy páratlan indexű elem lesz, amelynek szomszédait korábban már megadtuk –, s azt mondjuk, hogy ez legyen a szomszédos elemek összege.

Legyen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ és $a_{2k} = a_k$, ha az a_k ismert. Továbbá a legkisebb indexű, ily módon még nem definiált elem esetén legyen $a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n+2}$.

Tudjuk, hogy minden nullától különböző egész szám egyértelműen írható fel egy páratlan szám és egy kettő hatvány szorzataként. Ezt a páratlan számot szokás a vizsgált szám páratlan részének is nevezni. ($n = 2^k m$, ahol m a páratlan rész.) A sorozat definíciója szerint, ha az indexek páratlan része megegyezik, akkor a sorozat elemei is egyenlőek. (Fordítva ez nem szükségképpen igaz, hiszen például $a_5 = a_7 = 3$.)



1. ábra
Definiáljuk a sorozat elemeit lépésről-lépésre

2. definíció: Közéírásos sorozat

Készítsünk véges számsorozatokat a 0, 1 két elemű sorozatból kiindulva. Az $(n+1)$. sorozat szülessen az n.-ből úgy, hogy az előző lépés minden két szomszédos eleme közé beiktatjuk azok összegét. Így a kezdő 0-tól eltekintve a sorozatok hossza minden lépésben duplázódik. Ezzel a közéírásos módszerrel a 2.ábrán szemléltetett véges sorozatokat kapjuk, amelyeket a sorozat fő-részsorozatainak hívunk. Az eljárás vég nélküli alkalmazásával jutunk a szóban forgó végtelen sorozathoz.

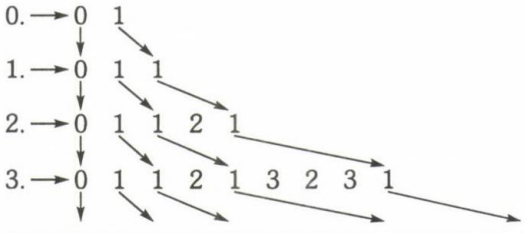
Könnyedén igazolható a definíciók ekvivalenciája. Bebizonyítjuk, hogy a fenti két definícióval ugyanazt a számsorozatot adtuk meg. Elég csupán azt megmutatni, hogy a fő-részsorozatok megegyeznek. Belátjuk, hogy a második definíció alapján ugyanazt a sorozatot kapjuk, a különbség csak annyi, hogy a sorozat elemeit más sorrendben definiáljuk. A kezdő 0-t a sorozat 0. elemének tekintve, a 2. definíció szerint minden lépésben a közéírások miatt a sorozat minden egyes eleme a kétszer annyiadik pozícióba kerül, majd a páratlan indexű helyeken az 1. definíciónak megfelelően a már ismert szomszédok összegét írjuk. Az első néhány sor figyelembevételével azt már könnyű – teljes indukció segítségével – bizonyítani, hogy a már egyszer definiált elemek értékét a további lépésekben sohasem kell megváltoztatni annak ellenére, hogy a közéírások miatt a sorozat már ismert elemeinek indexe minden lépésben duplázódik (2. ábra). Nem kell tehát a végtelenbe való átmenetnél pl. határértékszámítás a sorozat megadásához. Ez a jelenség a virtuális mozdulatlanság. A közéírásos sorozat tehát azon ritka sorozatok egyike, amelyeket a fent említett transzformáció (nyújtás, majd közéírás) helybenhagy.

A kiinduló elemekből származtatott egyesek segítségével bontsuk a sorozatot szeletekre a 3. ábrának megfelelően! Ekkor az n. szelet hossza $2^{n-1}+1$ lesz. (A záró egyesek tartozzanak a szeletekhez.) A következő fórész-sorozatot mindig úgy nyerjük az előzőből, hogy azt megtoldjuk a sorozat megfelelő szeletével. A szeletek tulajdonságait érdemes külön is vizsgálni, de erre csak a következő cikkben térünk ki, ahol már jobban rámutathatunk az egyes tulajdonságok hátterére.

Az alábbiakban a sorozat egy különleges tulajdonságát fogjuk ismertetni. Induljuk ki valamely fő-részsorozatból, és ezt, mint egy képzeletbeli szalagot – a 4.ábrán szemléltetett módon – hajtsuk félbe (eközben a középső 1-est meg kell dupláznunk)! Ekkor az egyesre végződő részsorozatokból közönséges törtek egy-egy sorozatát nyerjük úgy, hogy az egymás alá kerülő számokat egyazon közönséges tört számlálójának és nevezőjének tekintjük.

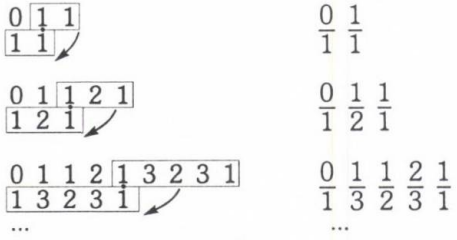
A kapott racionális számok, illetve azok sorozatai sok érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Ezeknek az úgynevezett **közéírásos törtek**nek, illetve azok sorozatainak, amelyeket **közéírásos táblázatok**nak fogunk hívni, részletesebb vizsgálata megtalálható a szakirodalomban [1]. Ugyanez elmondható az ún. Farey-sorozatokról, illetve számtáblázatokról is [2]. E két rendszer között röviden szólva csupán az a különbség, hogy a második esetben egy törtet csak akkor jelenítünk meg az n. lépésben, amikor annak nevezője n-nél nem nagyobb.

- A formálisan elkészített törteket valóban értelmezhetjük racionális számokként, hiszen a nulla sehol sem került a nevezőbe.
- A sorozat elemei 0 és 1 közötti racionális számok, a számláló sehol sem nagyobb a nevezőnél.



2. ábra
A közéírásos módszerrel nyert fő-részsorozatok

3. ábra
A sorozat szeletekre bontása



4. ábra
A sorozatszalag félbehajtása

- A törteket minden esetben redukált alakban kapjuk, vagyis a „szalag" félbehajtásával egymásnak megfeleltetett természetes számok relatív prímek.
- Végül azt tapasztaljuk, hogy a 0, 1 közötti, redukált alakú racionális számok növekvő sorrendben követik egymást.

Felmerül a kérdés, hogy minden 0, 1 közötti racionális számot megtalálhatunk-e valahol az előálló törtek között? A fent említett irodalomban erre a kérdésre is megkapjuk a pozitív választ.

De térjünk vissza a kiinduló számsorozat vizsgálatához! Az 1. definícióval kapcsolatban láttuk, hogy a páratlan indexű elemek megadása már elégséges a sorozat definiálásához. Foglaljuk táblázatba a kapott információkat!

Szeretnénk áttekinteni, hogy az (a_n) sorozatban az 1. definíciónak megfelelően hány különböző lépésben írtuk ugyanazt a számot. Készítsünk táblázatot, s jelölje $Y(n)$ az előfordulások számát! $Y(3)$ például 2, mivel pontosan két esetben, a 3. és 4.lépésben az $5 \cdot 2^k$, illetve $7 \cdot 2^m$ alakban felírható indexsorozatoknak megfelelő elemek értéke lesz 3.

A fenti táblázatok alapján több elemi észrevételt tehetünk:

- A 5. ábra oszlopaiban egymáshoz relatí v prím számok állnak.
- A 6. ábra oszlopaiban egymáshoz relatív prím számok állnak.
- $Y(n)$ értéke az első két eset kivételével páros. (6. ábra).
- Az $Y(2) = 1$, $Y(3) = 2$, $Y(5) = 4$ ... alapján sejthető, hogy $Y(p) = p - 1$ minden p prímszám esetén.
- $Y(2) = 1$, $Y(4) = 2$, $Y(8) = 4$ ... alapján pedig azt állíthatjuk, hogy kettő-hatványokra az $Y(n)$ értéke az eggyel kisebb kitevőjű kettő-hatvány.

i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	...
(a_i)	1	2	3	3	4	5	5	4	5	7	8	7	7	8	...

5. ábra
A sorozat páratlan indexű elemei

Ismerve az Euler-féle számelméleti függvényt ($\varphi(n)$), észrevehetjük, hogy ez a fent említett tulajdonságok mindegyikével rendelkezik, sőt bebizonyítható [1], hogy $Y(n) \equiv \varphi(n)$. Tehát a sorozatban minden természetes szám – a fenti értelemben – pontosan annyiszor fordul elő, mint ahány nálánál kisebb, hozzá relatív prím természetes szám van. Az előfordulások száma (vagyis a $\varphi(n)$ értéke) a prímtényezős felbontás segítségével meghatározható:

$$n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \dots p_k^{\sigma} \rightarrow \varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Feladatok:

- Határozzuk meg a sorozat részletösszegeit!
- Melyik a sorozat n. eleméig leírt legnagyobb szám?
- Igaz-e, hogy a sorozat szomszédos elemei relatív prímek?
- Mi mondható a sorozat szomszédos elemeinek különbségéről?
- Hogyan határozható meg a sorozat n. eleme
- Ha a sorozat minden elemét elosztjuk a rákövetkezővel, akkor redukált alakú, pozitív racionális számok egy végtelen sorozatát kapjuk: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2} \dots$ Igaz-e, hogy ez a felsorolás teljes, vagyis minden ilyen számot ekkor pontosan egyszer soroltunk fel?
- A 2. definícióban leírt eljárással (nyújtás, majd közéírás) minden számsorozatot transzformálhatunk. Igazoljuk, hogy ennek a transzformációnak a fixpontjai éppen azok a sorozatok, amelyek a közéírásos-sorozat konstans szorosai (pl. az azonosan nulla sorozathoz a 0 konstanssal jutunk) .

Irodalom

[1] Matematikatanár-képzés, Az 1993-94.évi Varga Tamás Napok előadásai: Holló-Szabó Ferenc: Köztes-táblázatok

[2] I. Niven-H.S. Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe, MK. 1978 / 119.o

[3] Sárközy András: Számelmélet, (MK. 1976/87.o.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...
$Y(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	8	18	8	12	10	22	...

6. ábra
Az egyes számok előfordulásai az 1. definíció lépéseiben

HÍREK VERSENYEKRŐL

Ebben az évben először rendezték meg a Kis Matematikus Baráti Körök Kalmár László versenyének országos döntőjét a 3. és 4. osztályosok számára.

A rendezést a TIT Jurányi Lajos Egyesülete vállalta fel Nyíregyházán. Minden érdekelt megyéből és a fővárosból a megyei forduló első helyezettjeit hívták meg. A döntő első három helyezettje és felkészítő tanárai a következők:

3. osztály

1. *Szalkai Balázs*, Veszprém, tanára: Mikó Teréz
2. *Szirmai Péter*, Kisvárda, tanára: Tisza Attiláné
3. *Kelemen Edmond*, Szekszárd, tanára: dr. Márton Lőrinczné.

4. osztály

1. *Stanitz Bálint*, Győr, tanára: Bartháné Kiss Erika
2. *Hujter Bálint*, Budapest, tanára: Ámonné Virág Ibolya
3. *Szabó Tamás*, Kecskemét, tanára: Tóth Andrea.

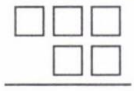
A kétnapos döntő feladatait Brenyó Mihály, a Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium tanára állította össze.

A feladatok a következők voltak:

Harmadik osztály
1. nap

1. Nagyapa a kertjéből 100 szem meggyet hozott az unokáinak. Először Zsóka vett hatot, majd Dani hetet és végül Bence négyet. Ezt addig ismétlik, míg a 100 szem meggy el nem fogy. Hány szem meggyet ehet az az unoka, aki utoljára vesz?

2. Az [1] [3] [5] [7] [9] lapokat helyezd el úgy, hogy
a) az összeg a legnagyobb legyen;
b) az összeg a legkisebb legyen;
c) a különbség a legnagyobb legyen;
d) a különbség a legkisebb legyen!



3. Négy darab azonos méretű négyzetből mindet mindig felhasználva rakj ki különböző síkidomokat úgy, hogy minden négyzet legalább egy másikkal teljes oldallal érintkezzen. (Két síkidom különböző, ha kivágva sem hozhatók fedésbe egymással.)

4. Tegyél műveleti jeleket (összeadás, kivonás, szorzás), hogy igaz legyen! Használhatsz zárójelet is!

3 2 1 = 1
3 2 1 = 2
3 2 1 = 3
3 2 1 = 4
3 2 1 = 5
3 2 1 = 6
3 2 1 = 7

5. Van egy kétkarú mérlegünk és négy súlyunk: 1, 2, 4 és 8 egység. Milyen egész értékeket tudunk velük mérni és hogyan?

Harmadik osztály
2. nap

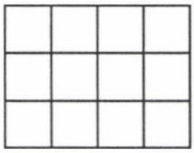
1. Válassz ki az 5; 17; 19; 37; 39; 46; 66 közül számokat úgy, hogy az összegük 100 legyen!

2. Egy kocka alakú sajtot három vágással hány gyerek között tudnál igazságosan elosztani? Válaszodat indokold!

3. Hányadik pozitív páratlan szám az 1999? Indokolj!

4. Bontsd fel a rácsvonalak mentén két egybevágó részre a téglalapot! Az egyik részt színezd ki! Keresd meg az összes különböző megoldást!

(Két rész különböző, ha kivágva és egymásra téve nem hozhatók pontosan fedésbe.)

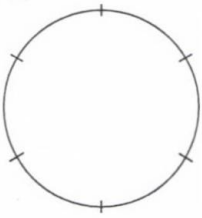


5. Legfeljebb hat azonos számjeggyel és műveleti jelekkel (összeadás, kivonás, szorzás és osztás) írd le a 24-et! Keress sok megoldást!

Negyedik osztály
1. nap

1. Írd fel a 45-öt egymás utáni pozitív egész számok összegeként! Keress meg minden megoldást!

2. Egy körvonalon kijelöltünk hat pontot. Minden pontot minden ponttal összekötve hány szakaszt kapunk?
Mi lenne a válaszod akkor, ha 10 pontot vennénk fel?



3. Tegyél műveleti jeleket, hogy igaz legyen! (Használhatsz zárójelet is.)

4 3 2 1 = 1
4 3 2 1 = 2
4 3 2 1 = 3
4 3 2 1 = 4
4 3 2 1 = 5
4 3 2 1 = 6
4 3 2 1 = 7
4 3 2 1 = 8

4. Egy számhoz hozzáadjuk az ő fordítottját; majd az összeghez annak a fordítottját, és így folytatjuk a számolást addig, amíg olyan számot nem kapunk, ami visszafelé olvasva is ugyanaz. Indulj az 1999-ből!

5. Van egy kétkarú mérlegünk és négy súlyunk:1; 3; 3 és 9 egység. Milyen egész értékeket lehet velük mérni és hogyan ?

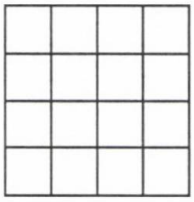
Negyedik osztály
2. nap

1. Írd le azokat a négyjegyű számokat, amelyekre igaz, hogy a számjegyek összege 11, és a nagyobb helyi értéken nagyobb számjegy áll, mint a kisebb helyi értéken!

2. Készítettünk egy számtáblát. Számítsd ki minél ügyesebben a táblában lévő számok összegét!

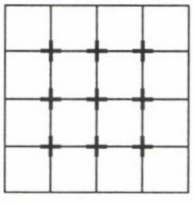
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13

3. Bontsd fel a négyzetet a rácsvonalak mentén két egybevágó részre! Az egyik részt színezd ki!
Két rész egybevágó, ha kivágva és egymásra téve pontosan fedik egymást. Keresd meg az összes különböző megoldást!



4. A jelenlegi évszámban három azonos számjegy van. 1000 után hány ilyen tulajdonságú évszám volt? Írd le azokat !

5. Felvettünk 9 pontot. Rajzolj különböző négyszögeket, amelyeknek minden csúcsa e pontok közül való! Két négyszög különböző, ha kivágva nem hozhatók fedésbe egymással. (Egy rajzon egy négyszög legyen!)



FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat kitűzőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2000. január 31.

A következő öt feladat mindegyike középiskolás versenyeken volt kitűzve Horvátországban 1998-ban, illetve 1999-ben.

135. Mutassuk meg, hogy bármely 79 egymást követő természetes szám között van legalább egy olyan, amelyben a számjegyek összege osztható 13-mal! Igaz-e ugyanez 78 egymást követő természetes számra?

136. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$a_1 = 1 \text{ és}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}), \text{ ha } n > 1.$$

Határozzuk meg az a_{1999} értékét!

137. Tekintsük egy adott parabola három tetszőlegesen választott érintőjét! Bizonyítsuk be, hogy a három érintő által közrefogott háromszög köréírt köre illeszkedik a parabola fókuszpontjára!

138. Egy tetraédernek pontosan egy olyan éle van, amelynek hossza nagyobb 1-nél. Igazoljuk, hogy a tetraéder térfogata nem nagyobb $\frac{1}{8}$-nál!

139. Határozzuk meg az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ permutációinak a számát, amelyekre pontosan egy olyan $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ index létezik, hogy $a_i > a_{i+1}$ teljesül!

Feladatmegoldások (120-124. feladatok)

120. Igazoljuk, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$\alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \gamma\cdot\alpha \le \frac{\pi^2}{3} \le \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2!$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: A feladatnak egy lényegesen általánosított változatát bizonyítjuk. Legyenek a_1, a_2, ..., a_n olyan valós számok, amelyekre $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$. Ekkor teljesül, hogy

$$\frac{2\sum_{i<j} a_i a_j}{n-1} \le \frac{k^2}{n} \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Ebből $n = 3$, $k = \pi$, valamint $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_3 = \gamma$, esetén az eredeti feladat állítását kapjuk.

A tekintett valós számok összegére vonatkozó feltétel négyzetre emelésével kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j = k^2. \qquad (1)$$

Másrészről viszont $\sum_{i<j} (a_i - a_j)^2 \ge 0$, ami a következő formában is írható:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{i<j} a_i a_j \ge 0. \qquad (2)$$

(1) és (2) megfelelő oldalainak összeadásával kapjuk, hogy

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq k^2. \qquad (3)$$

Ha (1)-ből a $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ összeget fejezzük ki és ezt (2)-be helyettesítjük, akkor az

$$(n-1)k^2 \geq 2n\sum_{i<j} a_i a_j \qquad (4)$$

egyenlőtlenséghez jutunk.
(3)-ból és (4)-ből közvetlenül adódik az általánosított állítás.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 9.

121. Mutassuk meg, hogy ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok mindegyike vagy $+1$, vagy -1, és

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \\ + x_3x_4x_5x_6 + \ldots + x_nx_1x_2x_3 = 0,$$

akkor n osztható 4-gyel!

Megoldás: A feltételből adódóan az n darab szorzat mindegyike vagy $+1$, vagy -1. Mivel ezek összege 0, ezért ugyanannyi $+1$ értékű szorzatnak kell lennie, mint -1 értékűnek, azaz n páros. Legyen $n = 2k$. A feladatbeli összeg tagjainak szorzata egyrészt $(x_1x_2\ldots x_n)^4$, másrészt $1^k \cdot (-1)^k$. Mivel $(x_1x_2\ldots x_n)^4 = 1$, ezért k páros, ami az állítást bizonyítja.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 8.

122. Határozzuk meg azokat az 1-től és egymástól is különböző p és q pozitív egész számokat, amelyekre az

$$\frac{1-\sin^p x-\cos^p x}{1-\sin^q x-\cos^q x}$$

tört értéke az x változó megengedett értékeitől függetlenül állandó!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Azonnal látható, hogy $p = 2$ és $q > 2$ esetén a tört értéke minden megengedett értékre 0, tehát ezek megoldásai a feladatnak.
Látható az is, hogy $q = 2$ esetén a tört egyetlen valós x-re sincs értelmezve, tehát $q \neq 2$.
Legyen a továbbiakban $p > 2$ és $q > 2$. Ezt figyelembe véve, ha $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor

$$\sin^q x + \cos^q x \leq |\sin x|^q + |\cos x|^q < \\ < \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

ami azt mutatja, hogy a $\frac{\pi}{2}$ egész számú többszöröseinek kivételével az összes valós szám megengedett értéke x-nek. Ha a tört állandó, akkor van olyan r valós szám, hogy

$$1 - \sin^p x - \cos^p x = r(1 - \sin^q x - \cos^q x) \quad (1)$$

minden megengedett x érték esetén. (1) minden valós számra értelmezett, ezért ha x helyébe $x + \pi$-t írunk, akkor a következő azonosságot kapjuk:

$$1 + (-1)^{p+1}(\sin^p x + \cos^p x) = \\ = r(1 + (-1)^{q+1}(\sin^q x + \cos^q x)), \qquad (2)$$

ami szintén értelmezett minden valós x esetén.
Ha p páratlan és q páros, akkor (1) és (2) alapján $\sin^p x + \cos^p x = 0$ minden valós x-re, ami nyilvánvalóan nem igaz. Ha p páros és q páratlan, akkor (1) és (2) következményeként $r(\sin^q x + \cos^q x) = 0$ minden valós x-re, ami csak akkor állhat fenn, ha $r = 0$, ami lehetetlen, ugyanis például $\frac{\pi}{4}$-ben $p > 2$ és $q > 2$ esetén a tört értéke nem 0. Ha p is és q is páratlan, akkor (1)-ből és (2)-ből következik, hogy $r = 1$, ami például $x = \frac{\pi}{4}$ esetén azt vonná maga után, hogy $p = q$, amit a feladat feltétele kizárt.
A továbbiakban a $p = 2n$, $q = 2m$ esetet vizsgáljuk.
Ha (1)-be $s = \sin^2 x$-et helyettesítünk, akkor a következő azonossághoz jutunk:

$$1 - s^n - (1-s)^n = r(1 - s^m - (1-s)^m) \quad (3)$$

minden $s \in [0; 1]$ esetén. (3) tulajdonképpen két polinom végtelen sok valós számra teljesülő egyenlőségét jelenti, amiből adódóan a két polinom azonosan egyenlő. Ez pedig azzal ekvi-

valens, hogy az azonos fokszámú tagok együtthatói rendre megegyeznek. (3) mindkét oldalát rendezett alakba írva kapjuk, hogy

$$((-1)^{n+1}-1)s^n+(-1)^n ns^{n-1}+\ldots+ns= \quad (4)$$
$$=r(((-1)^{m+1}-1)s^m+(-1)^m ms^{m-1}+\ldots+ms)$$

minden valós s érték esetén. Mivel $n \neq m$, ezért (4) csak úgy lehet azonosság, ha n és m különböző paritásúak. Ha n páros és m páratlan, akkor az együtthatók azonosításából $n = m - 1$, $-2 = -rm$, ..., $n = rm$, amelyekből $n = 2$, $m = 3$ és $r = \frac{2}{3}$. Ha n páratlan és m páros, akkor az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy $n = 3$, $m = 2$ és $r = \frac{3}{2}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így kapott $p = 4$, $q = 6$ és $p = 6$, $q = 4$ számpárok valóban megoldásai a feladatnak, és látható az is, hogy ezzel az összes lehetséges esetet kimerítettük.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 5.

123. Véletlenszerűen, visszatevés nélkül kihúzunk öt számot az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy az első három kihúzott szám is, és a kihúzott öt szám is számtani sorozatba rendezhető, nagyobb, mint $\frac{6}{(n-2)^3}$!

Megoldás: A kérdéses valószínűségnek csak $n > 4$ esetén van értelme. Először azt számoljuk össze, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak hány öt elemű részhalmaza rendezhető számtani sorozatba, amit úgy is mondhatnánk, hogy növekvő számtani sorozatba, hiszen ha öt szám számtani sorozatba rendezhető, akkor esetleg a sorrend megfordításával a növekvő sorrend mindig elérhető.

Ha a számtani sorozat differenciája 1, akkor $n - 4$ ilyen részhalmazunk lesz, ha a differencia 2, akkor $n - 8$, ..., ha a differencia a lehető legnagyobb, vagyis $\left[\frac{n-1}{4}\right]$, akkor $n-4\cdot\left[\frac{n-1}{4}\right]$ az említett differenciával rendelkező számtani sorozatba rendezhető öt elemű részhalmazok száma. Tehát az összes számtani sorozatba rendezhető öt elemű részhalmazok száma:

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{4}\right]}(n-4k)=\left[\frac{n-1}{4}\right]\cdot\left(n-2-2\cdot\left[\frac{n-1}{4}\right]\right).$$

Ha A jelöli azt az eseményt, hogy a kihúzott öt szám számtani sorozatba rendezhető, akkor az A esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A)=\frac{\left[\frac{n-1}{4}\right]\cdot\left(n-2-2\cdot\left[\frac{n-1}{4}\right]\right)}{\binom{n}{5}}.$$

Jelentse B azt az eseményt, hogy a kihúzott öt szám közül az első három számtani sorozatba rendezhető. Ha egy 5 elemű halmaz elemei számtani sorozatba rendezhetők, akkor ezekből három növekvő számtani sorozatot 4 módon választhatunk ki. Így, figyelembe véve az elemek kihúzási sorrendjét is, annak a feltételes valószínűsége, hogy a B esemény bekövetkezik, feltéve, hogy az A bekövetkezik

$$P(B|A)=\frac{4\cdot 3!}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{2}{5}.$$

A feladat az AB esemény bekövetkezésének valószínűségére fogalmaz meg becslést. Ez a valószínűség a fentiek figyelembe vételével

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=$$
$$=\frac{\left[\frac{n-1}{4}\right]\cdot\left(n-2-2\cdot\left[\frac{n-1}{4}\right]\right)}{\binom{n}{5}}\cdot\frac{2}{5}.$$

Ha $\left[\frac{n-1}{4}\right]=k$, akkor $n - 1 = 4k + m$, ahol $m \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ezzel a jelöléssel

$$P(AB)=\frac{48\cdot k\cdot(2k+m-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}=$$
$$=\frac{6(n-1-m)(n-3+m)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

Másrészről viszont $(n - 1 - m)(n - 3 + m) =$ $= (n - 2)^2 - (m - 1)^2 \geq (n - 2)^2$, valamint a szám-

tani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből adódóan $n(n-4) < (n-2)^2$ és $(n-1)(n-3) < (n-2)^2$. Ezek alapján

$$P(AB) > \frac{6}{(n-2)^3}.$$

Dályay Pál Péter, Szeged
Nagy Erzsébet, Szeged
Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 3.

124. A 3-nál nem kisebb n pozitív egész szám rendelkezik a következő tulajdonsággal: Az n oldalú, O középpontú szabályos sokszögnek van $\left[\frac{n}{2}\right]$ olyan csúcsa, amelyekből alkotott H ponthalmazra és a H O pont körüli $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, ..., $\frac{2(n-1)\pi}{n}$ szögű elforgatásaival kapott $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ ponthalmazokra teljesül, hogy

$$|H \cap H_1| = |H \cap H_2| = \ldots = |H \cap H_{n-1}| = 2.$$

Határozzuk meg az n összes lehetséges értékét!

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Számoljuk ki kétféleképpen a következő összeget:

$$S = |H \cap H_1| + |H \cap H_2| + \ldots + |H \cap H_{n-1}|.$$

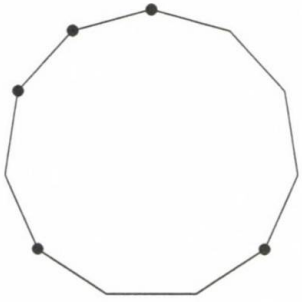
Egyrészt $S = 2(n-1)$. Másrészt mivel S az összes elforgatáskor keletkezett „átfedések" száma, ezért úgy is megkaphatjuk, ha észrevesszük, hogy H egy-egy eleme az összes többi elemet „át fogja fedni" pontosan egyszer az $n-1$ elforgatás során. Tehát az „átfedések" száma: $S = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)$.

Legyen $\left[\frac{n}{2}\right] = x$, ekkor $n = 2x + m$, ahol $m = 0$ vagy $m = 1$. Ezzel a jelöléssel a fenti kétféle számítás egyenlőségéből az

$$x^2 - 5x + 2 - 2m = 0$$

másodfokú egyenlet adódik. Ha $m = 0$, akkor az egyenlet gyökei irracionálisak, így $m = 1$ lehet csak. Ekkor az egyenlet két gyöke 0 és 5, n értékei pedig 1 és 11. $n = 1$ a feltételek miatt nem lehet, így $n = 11$.

$n = 11$ esetén van megfelelő H ponthalmaz, amint az az *1. ábrán* látható.



1. ábra

Nagy Erzsébet, Szeged
Simon József, Csíkszereda
Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 4.

A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (120., 121.); Dályay Pál Péter, Szeged (120. 2 mód, 121. 2 mód, 122. 3 mód, 123., 124.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (120-122.); László Sándor, Szombathely (120.); Nagy Erzsébet, Szeged (120-124.); Schutzbach Mártonné, Siófok (120., 121.); Simon József, Csíkszereda (120., 121., 124.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (120-122.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (120-124.).

MOZAIK
MÓDSZERTANI NAPOK
1999/2000

DECEMBER 7. – SZEGED • DECEMBER 10. – PÉCS • DECEMBER 17. – BUDAPEST
JANUÁR 13. – SZOMBATHELY • JANUÁR 14. – SZÉKESFEHÉRVÁR
JANUÁR 20. – MISKOLC • JANUÁR 21. – HAJDÚSZOBOSZLÓ

Alsó tagozat	Magyar nyelv és irodalom	Matematika	Informatika	Fizika	Biológia Kémia	Földrajz
10^{00}–11^{30} *Balkovitzné Cynolter Magdolna* **A szövegértés fejlesztése kisiskoláskorban**	10^{00}–11^{30} *Fekete Gabriella* **Korszerű anyanyelvi nevelés felső tagozatban** (A Nyelvtan – Helyesírás – Fogalmazás tk.-család)	10^{00}–11^{30} *Pintér Klára / Kosztolányi József* **Problémamegoldás és fogalomépítés felső tagozatban**	10^{00}–11^{30} *Rozgonyi-Borus Ferenc* **Milyen változásokat hoz a kerettanterv az informatika tanításában?**	10^{00}–11^{30} *Halász Tibor* **Hogyan alkalmazkodhatunk az új szabályozási rendhez?**	10^{00}–11^{30} *Jámbor Gyuláné* **Minőségbiztosítás – gondolkodásfejlesztés a biológiaórán**	10^{00}–11^{30} *Makádi Mariann* **A kerettanterv a földrajz tanításában**
11^{30}–12^{15} *Állófogadás*	11^{30}–12^{15} *Állófogadás*	11^{30}–12^{15} *Állófogadás*	11^{30}–12^{15} *Állófogadás*	11^{30}–12^{15} *Állófogadás*	11^{30}–12^{15} *Állófogadás*	11^{30}–12^{15} *Állófogadás*
12^{15}–14^{00} *Csizmazia György / Földvári Erika / Lassúné Ruskó Renáta* **„Tág az élet, mint az álom ..."** (Integrált oktatás az alsó tagozatban)	12^{15}–14^{00} *Kutas Ferenc* **Kerettanterv és tankönyvek az irodalom tanításában** (Új és hagyományos módszerek szintézise egy tankönyvcsaládban)	12^{15}–14^{00} *Vincze István / Csordás Mihály / Konfár László* **Feladatok, problémák a matematika iránt érdeklődő tanulóknak**	12^{15}–14^{00} *Kokas Károly* **Eligazodni a világban: az iskolai könyvtár**	12^{15}–14^{00} *Miskolczi Józsefné* **Fizikafeladatok és a gondolkodás fejlesztése**	12^{15}–14^{00} *Siposné K. Éva* **Kémiai ismeretek az egészségés a környezetvédelemben**	12^{15}–14^{00} *Vízvári Albertné* **Magyarország földrajza a változások tükrében**
				Fakultatív előadás 12^{15}–14^{00} *Tóth Katalin* **Biológia a fizikaórán – fizika a biológiaórán**		

Jelentkezés legkésőbb a módszertani nap időpontja előtt tíz nappal. Cím: 6701 Szeged, Pf. 301.
A részvételi díj 600,- Ft, mely összeg a helyszínen levásárolható. A befizetéseket belföldi postautalványon vagy átutalással a 10402805-28013118 (KHB. Rt., Szeged) számlaszámra kérjük.
Bővebb felvilágosítás a (62) 470-101-es telefonszámon.

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 470-101, 488-282
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73., Tel.: (62) 485-522

MOZAIK